Partie I: Rayonnement Thermique

Exercice I.1:

1. La température d'un corps noir est de **650°C**. Quelle doit être sa température pour doubler son énergie rayonnée par unité de temps.
2. Une sphère de diamètre **D=1m**, de température uniforme T_S rayonne dans le milieu environnant une puissance thermique de **5 KW**. Calculer la température de cette sphère, assimilée à un corps gris d'émissivité $\varepsilon=0,75$. La constante de **Stefan-Boltzmann** est $\sigma=5,67\times10^{-8}\ W/m^2.K^4$.

Solution:

- La puissance totale rayonnée, par unité de surface, par un corps noir à la température **T** est fournie par la loi de **Steffan-Boltzmann**:

$$M^0(\lambda)=\sigma T^4 \quad (W/m^2)$$

où σ est la constante de *Steffan-Boltzmann*: $\begin{cases}\sigma=5,67\times10^{-8}\ W/m^{2.}.K^4\\ ou\\ \sigma=4,88\times10^{-8}\ Kcal/h.m^{2.}.K^4\end{cases}$

$M^0(T)$: émittance totale du corps noir.

- L'émittance totale d'un corps réel est:

$$M(T)=\varepsilon M^0(\lambda,T)=\varepsilon\sigma T^4$$

où ε est l'émissivité du corps réel (grandeur radiative caractéristique du corps).

1. *Corps noir:*

La puissance thermique émise, par unité de surface par un corps noir à la température **T=650°C** est:

$$M^0(\lambda)=\sigma T^4 \quad (W/m^2)$$
$$M^0=41152\cdot W/m^2$$

Pour doubler la puissance émise par ce corps, il faut que sa température soit égale à *T'*:

$$M^{0}{}'=2M^0 \Rightarrow \sigma T'^4=2\sigma T^4$$
$$T'=2^{\frac{1}{4}}T \Rightarrow T'=1097,63°K=824,64°C$$

2. *Corps réel:*

Sphère=corps gris (**D, ε, T_S**)
La puissance thermique rayonnée par la sphère s'exprime comme suit:

$$\Phi=SM=S\varepsilon M^0=\pi D^2\varepsilon\sigma T_S^4$$

La température de la sphère est donnée par:

$$T_S=\left(\frac{\Phi}{\pi D^2\varepsilon\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}$$
$$T_S\approx440°K=167°C$$

Exercice I.2:

Indiquer quelle fraction de l'émittance totale d'un corps noir à **5500°C** est située dans le domaine visible ($0,4\le\lambda\le0,8\mu m$). Calculer λ_{max} et M_{max}.

Solution:

1. Les paramètres d'entrée de la table donnant $F_{0-\lambda T}$ sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 T = 2309\mu.°K \\ \lambda_2 T = 4618\mu.°K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{0-\lambda_1 T} = 0,122 \\ F_{0-\lambda_2 T} = 0,5822 \end{cases}$$

Donc :

$$F_{\lambda_1 T-\lambda_2 T} = F_{0-\lambda_1 T} - F_{0-\lambda_2 T} = 0,46$$

Environ ***46%*** du rayonnement émis par le corps noir à $T=5500°C$ est situé dans le domaine visible.

2. D'après les deux lois de ***Wien***, on a:

$$\begin{cases} \lambda_{max} T = 2898\,(\mu m.°K) \\ M_{\lambda_{max}} = BT^5\,(KW/m^2.\mu m) \end{cases}$$

$$avec : B = 1,287\times 10^{-11}\,KW/K^{5.}m^2.\mu m$$

$$A.N.: \begin{cases} \lambda_{max} \approx 0,502\mu m \text{ (Indigo)} \\ M_{\lambda_{max}} \approx 82525\,KW/m^2.\mu m \end{cases}$$

Exercice I.3:

Les murs d'un local sont recouverts d'une couche de peinture blanche d'émissivité monochromatique $\varepsilon_\lambda(\lambda,T)$ variant selon la loi suivante:

$$\varepsilon_\lambda(\lambda,T) = \begin{cases} \varepsilon_1 = 0,3 ... 0 < \lambda < 3\mu m \\ \varepsilon_2 = 0,9 .. \lambda > 3\mu m \end{cases}$$

L'un des murs de ce local est en contact avec l'extérieur (façade) et a une température $T_1=33°C$, les autres murs ont une température identique $T_2=25°C$.

1- Calculer l'émissivité totale $\varepsilon_1=\varepsilon(T_1)$ de la surface du mur en contact avec l'extérieur.
2- Même question pour les autres murs.

Solution :

1. L'émittance totale $M(T)$ rayonnée par un corps réel de température T et d'émissivité $\varepsilon(T)$ s'écrit :

$$M(T) = \varepsilon(T)\times M^0(T) = \varepsilon(T)\times\sigma\times T^4$$

D'où :

$$\varepsilon(T) = \frac{M(T)}{M^0(T)} = \frac{1}{\sigma T^4}\int_0^\infty M_\lambda^0(\lambda,T)\times\varepsilon_\lambda(\lambda,T)d\lambda$$

$$\textbf{avec : } \varepsilon_\lambda(\lambda,T) = \begin{cases} \varepsilon_1 = 0,3 & \textbf{pour } 0 \le \lambda < \lambda_1 \\ \varepsilon_2 = 0,9 & \textbf{pour } \lambda > \lambda_1 \end{cases} \qquad (\lambda_1 = 3\,\mu m)$$

$$\varepsilon(T) = \varepsilon_1\left[\frac{1}{\sigma T^4}\int_0^{\lambda_1} M_\lambda^0(\lambda,T)\varepsilon_\lambda(\lambda,T)d\lambda\right] + \varepsilon_2\left[\frac{1}{\sigma T^4}\int_{\lambda_1}^\infty M_\lambda^0(\lambda,T)\varepsilon_\lambda(\lambda,T)d\lambda\right]$$

$$\textbf{D'où : } \quad \varepsilon(T) = \varepsilon_1 F_{0-\lambda_1 T} + \varepsilon_2\left(1 - F_{0-\lambda_1 T}\right)$$

Le paramètre d'entrée de la table donnant $F_{0-\lambda T}$ est :

$$\lambda_1 \times T_1 = 918 \approx 920 \quad \Rightarrow \quad F_{0-\lambda_1 T_1} = 0 \quad \text{(d'après la table)}$$

Finalement, l'émissivité totale $\varepsilon_1 = \varepsilon(T_1)$ de la surface du mur en contact avec l'extérieur vaut:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon(T_1) = 0,9$$

2. Pour les autres murs, un même raisonnement conduit à:

$$\lambda_1 \times T_2 = 894 \approx 900 \quad \Rightarrow \quad F_{0-\lambda_1 T_2} = 0 \quad \text{(d'après la table)}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon(T_2) = 0,9$$

Exercice I.4:

Une sphère de diamètre ***d=10 cm*** a une distribution de température uniforme T_s=***1000°C*** et est plongée dans l'air ambiant à la température T_a=***20°C***. La sphère et l'air sont considérés comme des corps noirs. La constante de ***Stefan-Boltzmann*** est $\sigma=5,67\times10^{-8}\ W/m^2.K^4$.

1. Calculer le flux net échangé par la sphère.
2. Calculer la longueur d'onde qui correspond à l'émission maximale.
3. Calculer la fraction d'émittance contenue dans le visible. Est ce que le rayonnement de la sphère sera perceptible à l'œil?
4. Est ce qu'on peut mesurer le rayonnement de cette sphère par un détecteur d'absorptivité voisine de ***1*** dans la bande spectrale ***0,3*** à ***2 μm*** et nulle en dehors de cette bande? Justifier votre réponse.

Solution:

1. Flux thermique échangé par rayonnement entre la sphère et l'air environnant:

$$\Phi_{r,net,s\to a} = S_s F_{sa}\sigma\left(T_s^4 - T_a^4\right) = S\sigma\left(T_s^4 - T_a^4\right)$$

Dans ce cas, on a:

$\mathcal{F}_{sa}=F_{sa}=1$, car la surface de la sphère et les couches d'air l'avoisinant sont considérées comme surfaces noires, planes, parallèles et infinies ($\varepsilon_s=\varepsilon_a=1$ et $F_{12}=1$).

D'où:
$$\Phi_{net} = \pi d^2\sigma\left(T_s^4 - T_a^4\right)$$

$$A.N.:\ \Phi_{net} \approx 4665\ W$$

2. λ_{max} et $M°_{\lambda max}$ sont donnés par les deux lois de ***Wien***:

$$\begin{cases} \lambda_{max}.T_s = 2898\ (\mu m.°K) \\ M^0_{\lambda_{max}} = BT^5\ (W/m^2.\mu m.) \end{cases}$$

$$AN: \begin{cases} \lambda_{max} = 2,28\ \mu m.\ (I.R.) \\ M^0_{\lambda_{max}} = 43025\ (W/m^2.\mu m.) \end{cases}$$

3. Fraction d'émittance contenue dans le visible $[0,4;0,8]\ \mu m$:

$$\begin{cases} \lambda_1 T_s = 509\ \mu.°K \\ \lambda_2 T_s = 1018\ \mu.°K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{0-\lambda_1 T} = 0,000 \\ F_{0-\lambda_2 T} = 0,0004 \end{cases}$$

Donc:

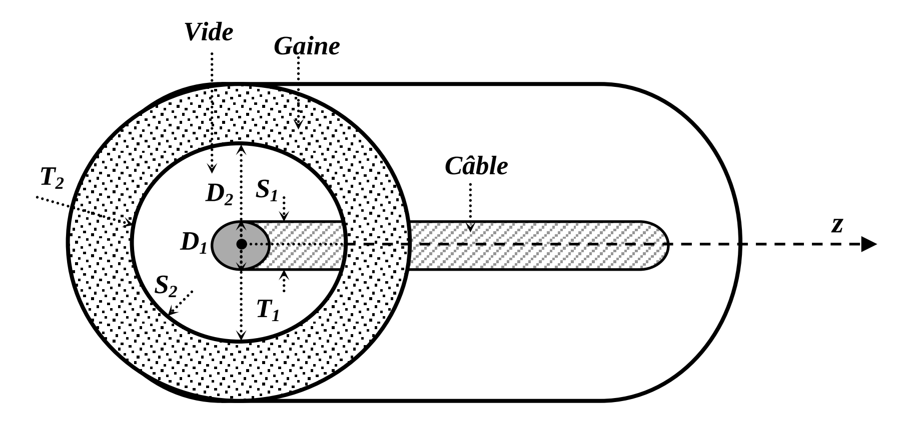
$$F_{\lambda_1 T-\lambda_2 T} = F_{0-\lambda_1 T} - F_{0-\lambda_2 T} = 0,0004$$

Environ ***0,04%*** de l'énergie émise par la sphère est rayonné dans le domaine visible. Ce rayonnement est donc faiblement perceptible à l'œil.

Exercice I.5:

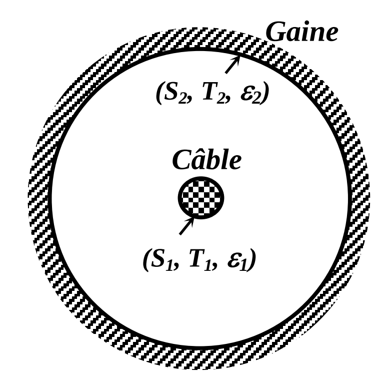
Un câble chauffant électrique de longueur ***20 cm*** est placé au centre d'une gaine, le vide étant créé entre le câble et la gaine. Le diamètre du câble est de ***5 mm*** et de celui de la gaine est de ***2 cm***.

1. En négligeant les effets de bords aux extrémités, donner la valeur des différents facteurs de forme.
2. Le câble doit dissiper une puissance de ***30 W*** sans que sa température ne dépasse ***800 K***. Sachant que les deux surfaces sont noires, calculer la température maximale que doit avoir la gaine.
3. Que devient cette température si le câble a un coefficient d'émission ε_1 de ***0,9*** et la gaine un coefficient d'émission ε_2 de ***0,8***.
4. Dans les conditions de la question ***3***, calculer la température maximale de la gaine si l'on place un cylindre écran de diamètre ***1 cm*** et de coefficient d'émission égal à ***0,6***.



Solution:

- Câble électrique: cylindre plein *(D_1=0,5 cm, L=20 cm,* $S_1 = \pi \times D_1 \times L = 31,42 \times 10^{-4}\ m^2$, T_1 et ε_1*)*.
- Gaine (isolant): cylindre creux *(D_2=2 cm* (diamètre interne), ***L=20 cm***, $S_2 = \pi \times D_2 \times L = 125,66 \times 10^{-4}\ m^2$, T_2 et ε_2*)*.



1. Le câble et la gaine correspondent à deux cylindres coaxiaux de longueur infinie $\Big(L \gg$ ***D2−D12=0,75***. Les facteurs de forme géométriques sont donc:

$$\begin{cases} F_{11} = 0 & (S_1\text{: surface convexe}) \\ F_{22} = 1 - \dfrac{S_1}{S_2} = 1 - \dfrac{D_1}{D_2} = 0,75 & (S_2\text{: surface concave}) \end{cases}$$

Compte tenu de la règle de complémentarité, on a :

$$\begin{cases} F_{12} = 1 - F_{11} = 1 \\ F_{21} = 1 - F_{12} = 0,25 \end{cases}$$

2. Les surfaces S_1 et S_2 sont noires ($\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$).
Calculons la température maximale que doit avoir la gaine sachant que le câble doit dissiper une puissance $\Phi=30\ W$ sans que sa température ne dépasse ***800 K***.
Les deux surfaces sont séparées par le vide, <u>*le seul mode de transfert de chaleur pouvant donc exister est le rayonnement*</u>.

Le câble (S_1) dissipe la puissance Φ par rayonnement :

$$\Phi = \Phi_{r,net:1\to 2} = S_1 \times \mathcal{F}_{12} \times \sigma \times \left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

$$\Phi = \frac{\pi \times D_1 \times L \times \sigma \times \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \dfrac{1}{F_{12}} + \dfrac{D_1}{D_2} \times \left(\dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} = \pi \times D_1 \times L \times \sigma \times \left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

Si T_1 est maximale alors T_2 est maximale.

Donc:

$$\Phi = \pi \times D_1 \times L \times \sigma \times \left(T_{1,max}^4 - T_{2,max}^4\right)$$

D'où on tire :

$$T_{2,max} = \left(T_{1,max}^4 - \frac{\Phi}{\pi \times D_1 \times L \times \sigma}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 701\ K = 428°C$$

3. Les surfaces S_1 et S_2 sont grises ($\varepsilon_1=0,9$ et $\varepsilon_2=0,8$)

$$\Phi = \Phi_{r,net:1\to 2} = S_1 \times \mathcal{F}_{12} \times \sigma \times \left(T_{1,max}^4 - T_{2,max}^4\right)$$

Avec:

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}} + \frac{S_1}{S_2} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{D_1}{D_2} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} = 0,8521$$

Par suite:

$$T_{2,max} = \left(T_{1,max}^4 - \frac{\Phi}{\pi \times D_1 \times L \times F_{12} \times \sigma}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 678,5\ K = 405,5°C$$

4. On place un cylindre écran thermique de diamètre $D_3=1\ cm$, de longueur L et de coefficient d'émission $\varepsilon_3=0,6$.

Calculons la valeur de $T_{2,max}$.

- Ecran thermique cylindre creux de très faible épaisseur $e=D_e-D_i$ ($D_i \approx D_e=D_3=1\ cm$, $L=20\ cm$, $S_3 = \pi \times D_3 \times L = 62,83 \times 10^{-4}\ m^2$, T_3 et $\varepsilon_3=0,6$)

Effectuons un bilan thermique sur l'écran
Le bilan thermique s'écrit, littéralement, sous la forme:

$$Gains - Pertes + Production\ (ou\ consommation) = Accumulation$$

Dans le milieu considéré (écran), il n'y a pas de production (consommation) ni d'accumulation d'énergie. Ainsi, le bilan énergétique se réduit à :

$$Gains - Pertes = 0$$

- ***Gains:***

L'écran reçoit de la part du câble le flux radiatif suivant:

$$\Phi_{r,net:1\to3} = S_1 \times \mathcal{F}_{13} \times \sigma \times (T_1^4 - T_3^4)$$

- ***Pertes:***

L'écran cède à la gaine le flux radiatif suivant:

$$\Phi_{r,net:3\to2} = S_3 \times \mathcal{F}_{32} \times \sigma \times (T_3^4 - T_2^4)$$

L'équation du bilan thermique devient :

$$\Phi_{r,net:1\to3} - \Phi_{r,net:3\to2} = 0$$

$$S_1 \times \mathcal{F}_{13} \times \sigma \times (T_1^4 - T_3^4) = S_3 \times \mathcal{F}_{32} \times \sigma \times (T_3^4 - T_2^4) \qquad ①$$

On pose:

$A = S_1 \times \mathcal{F}_{13}$ et $B = S_3 \times \mathcal{F}_{32}$

$$A = S_1 \times \mathcal{F}_{13} = \frac{\pi \times D_1 \times L}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{13}} + \frac{D_1}{D_3} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_3} - 1\right)} \approx 2,175 \times 10^{-3}\ m^2$$

et

$$B = S_3 \times \mathcal{F}_{23} = \frac{\pi \times D_3 \times L}{\frac{1}{\varepsilon_3} - 1 + \frac{1}{F_{32}} + \frac{D_3}{D_2} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} \approx 3,507 \times 10^{-3}\ m^2$$

De l'équation ① on tire:

$$T_3^4 = \frac{A \times T_1^4 + B \times T_2^4}{A + B}$$

Calculons $T_{2,max}^4$

On a :

$$\Phi = \Phi_{r,net:1\to3} = A \times \sigma \times \left(T_{1,max}^4 - \frac{A \times T_{1,max}^4 + B \times T_{2,max}^4}{A + B}\right)$$

D'où :

$$T_{2,max} = \left(T_{1,max}^4 - \frac{A + B}{A \times B \times \sigma}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 704,3\ K = 431,3°C$$

On rappelle que :

Φ=30 W représente le flux thermique dissipé, par effet ***Joule***, par le câble électrique ;

$T_{1,max}$***=800 K*** représente la température du câble.

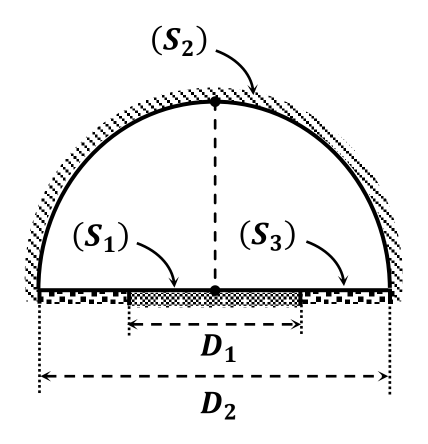
On en déduit la valeur de la température de l'écran qui est, elle aussi, maximale:

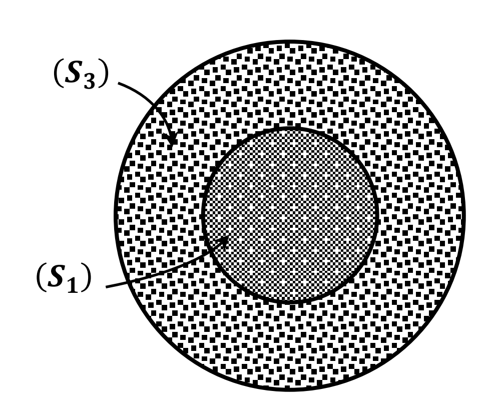
$$T_{3,max} = \left(\frac{A \times T_{1,max}^4 + B \times T_{2,max}^4}{A + B}\right)^{\frac{1}{4}} = 735,7\ K$$

<u>Exercice I.6</u>: (Extrait du contrôle d'éléments de génie des procédés, LST-PCM, 2012/2013)

Une demi sphère de diamètre D_2 et de surface S_2 échange de la chaleur par rayonnement avec deux surfaces S_1 et S_3 appartenant à son disque de base. La première surface S_1 est un disque de diamètre $D_1 = \frac{D_2}{2}$. L'autre surface S_3 est la couronne qui correspond à la différence des deux surfaces : disque de base de la demi sphère-surface S_1.

Déterminer les valeurs des facteurs de forme géométriques suivants: F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32} et F_{33}.





Solution:

Facteurs de forme géométriques suivants: F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32} et F_{33}.

- ***Surface S_1: F_{11}, F_{12}, F_{13}***

$$F_{11} = 0 \quad \text{car la surface } S_1 \text{ est plane}$$

$$F_{13} = 0 \quad \text{car les surfaces } S_1 \text{ et } S_3 \text{ appartiennent au même plan}$$

F_{12} s'obtient en appliquant la règle de complémentarité à S_1 :

$$\sum_{j=1}^{3} F_{1j} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{F_{11}}_{=0} + F_{12} + \underbrace{F_{13}}_{=0} = 1$$

Donc:

$$F_{12} = 1$$

- ***Surface S_3: F_{31}, F_{32}, F_{33}***

$$F_{33} = 0 \quad \text{car la surface } S_3 \text{ est plane}$$

F_{31} s'obtient en appliquant la règle de réciprocité au couple de surfaces $(S_1;\ S_3)$:

$$S_1 \times F_{13} = S_3 \times F_{31} \quad \Rightarrow \quad F_{31} = \frac{S_1}{S_3} \times F_{13} = 0$$

Donc:

$$F_{31} = 0$$

F_{32} s'obtient en appliquant la règle de complémentarité à S_3 :

$$\sum_{j=1}^{3} F_{3j} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{F_{31}}_{=0} + F_{32} + \underbrace{F_{33}}_{=0} = 1$$

Donc:

$$F_{32} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{3} F_{1j} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{F_{11}}_{=0} + F_{12} + \underbrace{F_{13}}_{=0} = 1$$

Donc :

$$F_{12} = 1$$

- ***Surface S_2: F_{21}, F_{22}, F_{23}***

F_{21} s'obtient en appliquant la règle de réciprocité au couple de surfaces $(S_1;\ S_2)$:

$$S_1 \times F_{12} = S_2 \times F_{21} \quad \Rightarrow \quad F_{21} = \frac{S_1}{S_2} \times F_{12} = \frac{S_1}{S_2}$$

Donc:

$$F_{21} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = \frac{1}{8} = 0,125$$

F_{23} s'obtient en appliquant la règle de réciprocité au couple de surfaces $(S_2;\ S_3)$:

$$S_2 \times F_{23} = S_3 \times F_{32} \quad \Rightarrow \quad F_{23} = \frac{S_3}{S_2} \times F_{32} = \frac{S_3}{S_2}$$

Donc:

$$F_{23} = \frac{S_3}{S_2} = \frac{S'_2 - S_1}{S_2} = \frac{\frac{\pi}{4} \times \left(D_2^2 - D_1^2\right)}{\frac{\pi}{2} \times D_2^2} = \frac{1}{2} \times \left(1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2\right) = \frac{3}{8} = 0,375$$

F_{22} s'obtient en appliquant la règle de complémentarité à S_2 :

$$\sum_{j=1}^{3} F_{2j} = 1 \quad \Rightarrow \quad F_{21} + F_{22} + F_{23} = 1$$

Donc:

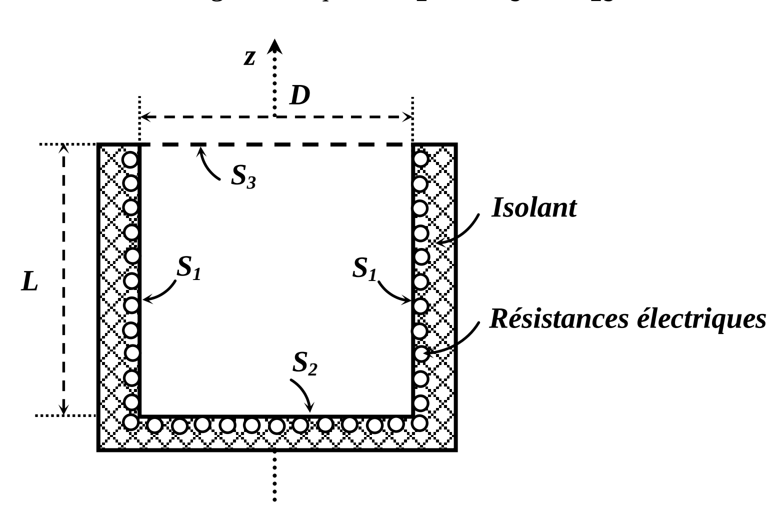
$$F_{22} = \frac{1}{2} = 0,5$$

<u>Exercice I.7</u>: (Extrait de TD de GP-IGM2_ 2012/2013)

Un four tubulaire vertical semi-ouvert de forme cylindrique, d'un diamètre interne $D = 75\ cm$ et de hauteur $L = 150\ cm$, est ouvert à son extrémité supérieure, vers l'extérieur considéré comme un corps noir à la température T_∞ constante de $20°C$.

Les parois intérieures du four, chauffées électriquement, sont considérées comme des corps noirs maintenus par régulation aux températures respectives de $T_1 = 1200°C$ pour la paroi interne latérale cylindrique de surface S_1 et $T_2 = 1600°C$ pour la paroi intérieure du fond inférieur de surface S_2 du four.

La surface extérieure du four est supposée parfaitement isolée de l'extérieur et on négligera les effets de convection naturelle. Le facteur de forme géométrique de S_2 vers S_3 est $F_{23} = 0,06$.



En considérant l'ouverture supérieure du four comme une surface fictive à la température $T_3 = T_\infty$ du milieu ambiant :

1. Calculer les facteurs de forme géométrique F_{ij} ***(i=1, 2, 3*** et ***j=1,2,3)*** internes du four tubulaire.
2. En déduire la puissance Φ nécessaire pour maintenir les températures des parois du four.

Solution:

Le four cylindrique est composé de :
- surface latérale noire S_1 ($S_1 = \pi.D.L$; $T_1 = 1200°C$; $\varepsilon_1 = 1$);
- surface de la base inférieure noire S_2: $\left(S_2 = \frac{\pi}{4}.D^2;\ T_2 = 1600°C;\ \varepsilon_2 = 1\right)$;
- surface de la base supérieure ouverte S_2, assimilée à une paroi fictive noire à la température de l'air ambiant: $\left(S_3 = S_2 = \frac{\pi}{4}.D^2;\ T_3 = T_\infty = 20°C;\ \varepsilon_3 = 1\right)$.

1. Facteurs de forme géométriques F_{ij} ($i = 1, 2, 3\ \ et\ \ j = 1, 2, 3$):
- Surface S_2:

$$F_{22} = 0 \quad \text{car } S_2 \text{ est plane}$$

$$F_{23} \approx 0,06 \text{ valeur fournie par la formule ou l'abaque}$$

La formule est donnée par:

$$F_{23} = \frac{1}{2} \times \left[Z - \sqrt{Z^2 - 4.X^2.Y^2}\right]$$

avec :

$$X = \frac{R_3}{L} = \frac{D}{2.L} \quad Y = \frac{L}{R_2} = \frac{2.L}{D} \quad et \quad Z = 1 + \left(1 + X^2\right).Y^2$$

F_{21} s'obtient en appliquant la règle de complémentarité à S_2:

$$\sum_{j=1}^{3} F_{2j} = 1 \quad \Rightarrow \quad F_{21} = 1 - F_{22} - F_{23} = 0,94$$

- Surface S_3:

$$F_{33} = 0 \quad \text{car } S_3 \text{ est plane}$$

F_{32} s'obtient en appliquant la règle de réciprocité au couple de surfaces (S_2; S_3):

$$S_2.F_{23} = S_3.F_{32} \quad \Rightarrow \quad F_{32} = \frac{S_2}{S_3}.F_{23} = F_{23} \approx 0,06$$

F_{31} s'obtient en appliquant la règle de complémentarité à S_3:

$$\sum_{j=1}^{3} F_{3j} = 1 \quad \Rightarrow \quad F_{31} = 1 - F_{32} - F_{33} \approx 0,94$$

- Surface S_1:

En appliquant la règle de réciprocité aux couples de surfaces (S_1; S_2) et (S_1; S_3), on obtient respectivement:

$$S_1.F_{12} = S_2.F_{21} \quad \text{et} \quad S_1.F_{13} = S_3.F_{31}$$

D'où :

$$F_{12} = \frac{S_2}{S_1}.F_{21} = \frac{D}{4.L}.F_{21} = 0,1175$$

et

$$F_{13} = \frac{S_3}{S_1}.F_{31} = \frac{D}{4.L}.F_{31} = 0,1175$$

F_{11} s'obtient en appliquant la règle de complémentarité à S_1:

$$\sum_{j=1}^{3} F_{1j} = 1 \quad \Rightarrow \quad F_{11} = 1 - F_{12} - F_{13} \approx 0,765$$

$F_{11} \neq 0$, car S_1 est concave.

2. La puissance, nécessaire pour maintenir les températures des parois du four, sert à compenser les pertes thermiques à travers l'ouverture de ce four. Elle représente donc la puissance radiative nette reçue par la paroi fictive S3 (ouverture du four) de la part de toutes les parois internes du four.

$$\Phi = \Phi_{r,net,3} = \Phi_{r,net:1\to3} + \Phi_{r,net:2\to3} + \underbrace{\Phi_{r,net:3\to3}}_{=0}$$

$$\Phi = \Phi_{r,net,3} = S_1.F_{12}.\sigma.\left(T_1^4 - T_3^4\right) + S_2.F_{23}.\sigma.\left(T_2^4 - T_3^4\right)$$

$$\Phi = \Phi_{r,net,3} = \pi.D.L.F_{12}.\sigma.\left(T_1^4 - T_3^4\right) + \frac{\pi}{4}.D^2.F_{23}.\sigma.\left(T_2^4 - T_3^4\right)$$

$$A.N.: \Phi = \Phi_{r,net,3} \approx 129,2\ KW$$

***Exercice I.8**: (Extrait de TD de GP-IGM2_ 2012/2013 et du contrôle de EGP-PCM_2010/2011)*

De l'oxygène liquide saturé à ***90 K*** s'écoule à l'intérieur d'une conduite, en acier inoxydable d'émissivité $\varepsilon_1=0,24$, de diamètre extérieur $D_1=25\ mm$, de longueur ***L=1 m*** et de température $T_1=90\ K$, placée dans l'air à la température $T_a=293\ K$ *(figure 1)*. La chaleur d'évaporation de l'oxygène liquide est $L_V=213\ KJ/Kg$.

1. Calculer la puissance thermique échangée par convection et par rayonnement entre la conduite et l'air ambiant. On prendra $h=10\ W/m^2.°C$, coefficient d'échange de chaleur par convection, et on assimilera l'air à un corps noir ($\varepsilon_a=1$).
2. Calculer, en ***Kg/h***, le débit massique d'évaporation de l'oxygène liquide.
3. Pour réduire le débit massique d'évaporation de l'oxygène liquide, on isole thermiquement la conduite en la plaçant à l'intérieur d'une chambre à vide *(figure 2)*. Les dimensions de cette chambre sont très grandes devant celles de la conduite ($S_1 \ll S_2$) et ses parois ont une émissivité ε_2 et sont maintenues à $T_2=233\ K$.

3-a) Quels sont les modes de transfert de chaleur en présence?

3-b) Déterminer la puissance thermique reçue par la conduite et le débit massique d'évaporation de l'oxygène liquide. En déduire la réduction, en pourcentage, du débit d'évaporation.

4. Pour renforcer l'isolation thermique de la conduite on la couvre par un cylindre écran en acier inoxydable ($\varepsilon_3=0,24$), de très faible épaisseur, de diamètre $D_3=45\ mm$, de longueur ***L=1 m*** ($S_3 \ll S_2$) et de température T_3 *(figure 3)*.

4-a) Calculer les facteurs de forme gris $\mathcal{F}_{13}$ et $\mathcal{F}_{32}$; en déduire la température T_3 du cylindre écran.

4-b) En déduire la puissance thermique reçue par la conduite et le débit d'évaporation de l'oxygène liquide.

4-c) En déduire la nouvelle réduction, en pourcentage, du débit d'évaporation.

On donne: $\sigma=5,67\times10^{-8}\ W/m^2.K^4$, constante de ***Stefan-Boltzmann***.

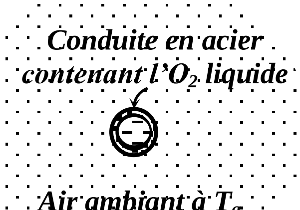


Figure 1 :

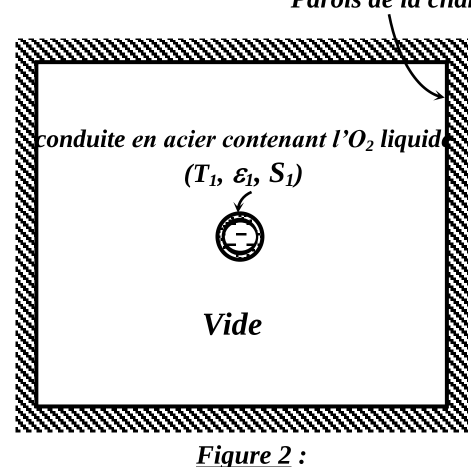


Figure 2 :

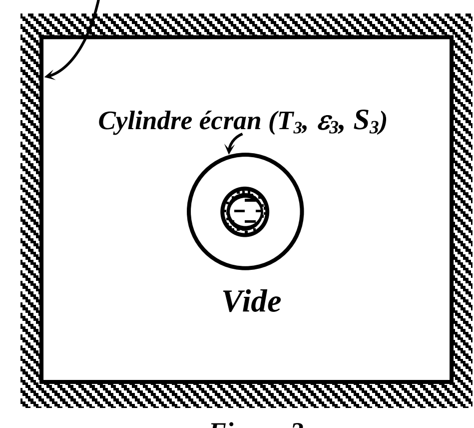


Figure 3 :

Solution:

- Fluide : l'oxygène liquide saturé $\left(T_{o_2} = 90\ K, L_V = 213\ KJ/Kg\right)$.
- Conduite (diamètre externe $D_1 = 25\ mm, L = 1\ m,\ S_1 = \pi.D_1.L, T_1 = T_{o_2} = 90\ K, \varepsilon_1 = 0,24$).
- Air ambiant $\left(S_a = S_1, T_1 = 293\ K, h = 10\ W/m^2.°C, \varepsilon_a = 1\right)$.
- Chambre à vide ($S_2 \gg S_1, \varepsilon_2, T_2 = 233\ K$).
- Cylindre écran ($D_3 = 45\ mm, L = 1\ m,\ S_3 = \pi.D_3.L, T_3 = ?, \varepsilon_3 = \varepsilon_1 = 0,24$)

1. Puissance échangée par convection et rayonnement entre le tube et l'air ambiant :

$$\Phi = \Phi_{cv} + \Phi_{r,net:a\to 1}$$

$$\Phi = S_1.h.(T_a - T_1) + S_1.\mathcal{F}_{1a}.\sigma.\left(T_a^4 - T_1^4\right)$$

avec:

$$\mathcal{F}_{1a} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{1a}} + \frac{S_1}{S_a} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_a} - 1\right)}$$

Or : $F_{1a} = 1$ et $\varepsilon_a = 1$

Donc:

$$\mathcal{F}_{1a} = \varepsilon_1 = 0,24$$

Il s'en suit que:

$$\Phi = \pi.D_1.L.\left[h.(T_a - T_1) + \varepsilon_1.\sigma.\left(T_a^4 - T_1^4\right)\right]$$

A.N.: $$\Phi = \underbrace{159,4}_{Conv.} + \underbrace{7,8}_{rayon.} \approx 167,2\ W$$

2. Débit massique d'évaporation de l'oxygène liquide

La puissance est intégralement reçue par l'oxygène et provoquant sa vaporisation:

$$\boldsymbol{\Phi = \dot{m}.L_V \quad \Rightarrow \quad \dot{m} = \frac{\Phi}{L_V} \approx 2,83\ Kg/h}$$

3. La conduite, contenant l'oxygène liquide, est maintenant placée dans la chambre à vide (*figure 2*).

3-a) Le rayonnement est le seul mode de transfert de chaleur existant.

3-b) Puissance thermique reçue par la conduite :

$$\boldsymbol{\Phi' = \Phi_{r,net:2\to1} = -\Phi_{r,net:1\to2}}$$

$$\boldsymbol{\Phi' = -S_1.\mathcal{F}_{12}.\sigma.\left(T_1^4 - T_2^4\right)}$$

avec:

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}} + \frac{S_1}{S_2} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)}$$

Or : $\boldsymbol{F_{12} = 1}$ et $\boldsymbol{S_1 \ll S_2}$

Donc:

$$\mathcal{F}_{12} \approx \boldsymbol{\varepsilon_1 = 0,24}$$

Il s'en suit que:

$$\boldsymbol{\Phi' = \pi.D_1.L.\varepsilon_1.\sigma.\left(T_2^4 - T_1^4\right)}$$

A.N.: $\boldsymbol{\Phi' = 3,08\ W}$

- Débit massique d'évaporation de $\boldsymbol{O_2}$:

$$\boldsymbol{\Phi' = \dot{m}'.L_V \quad \Rightarrow \quad \dot{m}' = \frac{\Phi'}{L_V} \approx 0,052\ Kg/h}$$

- Réduction en pourcentage du débit massique d'évaporation:

$$\frac{\Delta\dot{m}}{\dot{m}}\% = \frac{\dot{m}' - \dot{m}}{\dot{m}} \times \boldsymbol{100 \approx -98\%}$$

4. La conduite, contenant l'oxygène liquide, est maintenant recouverte par un cylindre écran (*figure 3*).

4-a) Calculons les facteurs de forme gris $\mathcal{F}_{13}$ et $\mathcal{F}_{32}$:

$$\mathcal{F}_{13} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{13}} + \frac{S_1}{S_3} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_3} - 1\right)}$$

$\boldsymbol{F_{13} = 1}$, car $\boldsymbol{S_1}$ est complètement entouré par $\boldsymbol{S_3}$.

$\varepsilon_3 = \varepsilon_1$

Donc :

$$\mathcal{F}_{13} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{D_1}{D_3} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right)} \approx \boldsymbol{0,169}$$

$$\mathcal{F}_{32} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_3} - 1 + \frac{1}{F_{32}} + \frac{S_3}{S_2} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)}$$

$\boldsymbol{F_{32} + \underbrace{F_{33}}_{=0} = 1 \quad \Rightarrow \quad F_{32} = 1}$ et $\boldsymbol{S_3 \ll S_2}$

Donc :

$$\mathcal{F}_{13} \approx \boldsymbol{\varepsilon_3 = 0,24}$$

- On en déduit la température T_3 du cylindre écran

Bilan radiatif sur S_3:
L'équation du bilan énergétique s'écrit:

$$\Phi_{r,net:2\to1} = \Phi_{r,net:2\to3} = \Phi_{r,net:3\to1} \qquad (1)$$

On a:

$$\Phi_{r,net:2\to3} = \Phi_{r,net:3\to1}$$

$$\Rightarrow \quad -\Phi_{r,net:3\to2} = -\Phi_{r,net:1\to3}$$

$$\Rightarrow \quad -S_3.\mathcal{F}_{32}.\sigma.\left(T_3^4 - T_2^4\right) = -S_1.\mathcal{F}_{13}.\sigma.\left(T_1^4 - T_3^4\right)$$

$$\Rightarrow \quad (S_3.\mathcal{F}_{32}+S_1.\mathcal{F}_{13})\times T_3^4 = S_3.\mathcal{F}_{32}.T_2^4 + S_1.\mathcal{F}_{13}.T_1^4$$

$$T_3^4=(S_3.\mathcal{F}_{32}.T_2^4 + S_1.\mathcal{F}_{13}.T_1^4)/\,(S_3.\mathcal{F}_{32}+S_1.\mathcal{F}_{13})$$

qui s'écrit encore:

$$T_3^4=(D_3.\mathcal{F}_{32}.T_2^4 + D_1.\mathcal{F}_{13}.T_1^4)/\,(D_3.\mathcal{F}_{32}+D_1.\mathcal{F}_{13})$$

$$A.N.: \quad T_3 \approx 215\ K = -58°C$$

4-b) On en déduit la puissance thermique reçue par la conduite et le débit d'évaporation de l'oxygène liquide.

- Puissance thermique:

D'après (1), on a:

$$\Phi'' = \Phi_{r,net:2\to1} = \Phi_{r,net:3\to1} = -S_1.\mathcal{F}_{13}.\sigma.\left(T_1^4 - T_3^4\right)$$

$$\Phi'' = \Phi_{r,net:2\to1} = \pi.D_1.L.\mathcal{F}_{13}.\sigma.\left(T_3^4 - T_1^4\right)$$

$$\Phi'' = \Phi_{r,net:2\to1} \approx 1,56\ W$$

- Débit d'évaporation de O_2:

$$\Phi'' = \dot{m}''.L_V \quad \Rightarrow \quad \dot{m}'' = \frac{\Phi''}{L_V} \approx 0,026\ Kg/h$$

4-c) Nouvelle réduction en pourcentage du débit massique d'évaporation:

$$\frac{\Delta\dot{m}'}{\dot{m}'}\% = \frac{\dot{m}'' - \dot{m}'}{\dot{m}'} \times 100 \approx -50\%$$

<u>Exercice I.9</u>: (Extrait de TD de GP-IGM2_ 2012/2013 et du contrôle de EGP-PCM_2011/2012)
On transporte de l'azote liquide dans un réservoir sphérique (sphère (S_1)), de très faible épaisseur, de rayon R_1*= 1 m*, entouré d'une sphère concentrique externe (S_2), de rayon R_2 *= 1,2 m*.
L'espace annulaire clos, compris entre le réservoir et la sphère est rempli d'air immobile (λ_a*=0,023 W/m.°C)*, agissant en isolant thermique, vis à-vis des apports thermiques externes. On considère négligeables, les résistances thermiques de conduction des deux sphères concentriques.
Un petit évent (conduit de soutirage ($\mathcal{C}$)), que l'on négligera, est disposé sur la sphère intérieure et débouche à l'extérieur de façon à évacuer, en continu, l'azote gazeux formé du fait de la vaporisation de l'azote liquide sous l'effet de l'apport thermique extérieur, empêchant ainsi la mise en pression du réservoir d'azote liquide. Dans ces conditions, la pression interne du réservoir reste égale à la pression atmosphérique, et la température de l'azote liquide se maintient à sa température d'ébullition à la pression atmosphérique, soit: T_1*=77 K*. La température de l'air extérieur est fixée à T_2*=300 K*.

On suppose un équilibre thermique d'une part entre la sphère (S_1) et l'azote et d'autre part entre la sphère (S_2) et l'air extérieur.

1. Quels sont les modes de transfert de chaleur en présence?
2. Calculer la résistance thermique de conduction $R_{cd,a}$ de la couche sphérique d'air situé dans l'espace annulaire compris entre les deux sphères (S_1) et (S_2). En déduire le flux de chaleur Φ_{cd} échangé par conduction entre (S_1) et (S_2).
3. Calculer le flux radiatif net $\Phi_{r,net:2\to 1}$ transféré de la sphère (S_2) vers le réservoir contenant l'azote (sphère (S_1)). Les coefficients d'émission des matériaux constituant le réservoir et la sphère extérieure (S_2) sont pris respectivement égaux à $\varepsilon_1 = 0,4$ et $\varepsilon_2 = 0,6$. On donne: $\sigma = 5,67\times10^{-8}\ W/m^2.K^4$, constante de ***Stefan-Boltzmann***.
4. En déduire le flux de chaleur total Φ_{tot} transféré de la sphère (S_2) vers le réservoir contenant l'azote.
5. Sachant que ce réservoir était initialement rempli à 96% de son contenu volumique maximum, donner la masse M_{init} d'azote correspondant.
6. Calculer le temps Δt au bout duquel le réservoir pourra être livré, rempli à 80%.

On donne pour l'azote liquide : masse volumique: $\rho = 808\ Kg/m^3$ et chaleur latente de vaporisation, à la pression atmosphérique, $L_V = 2\times10^5\ J/Kg$.

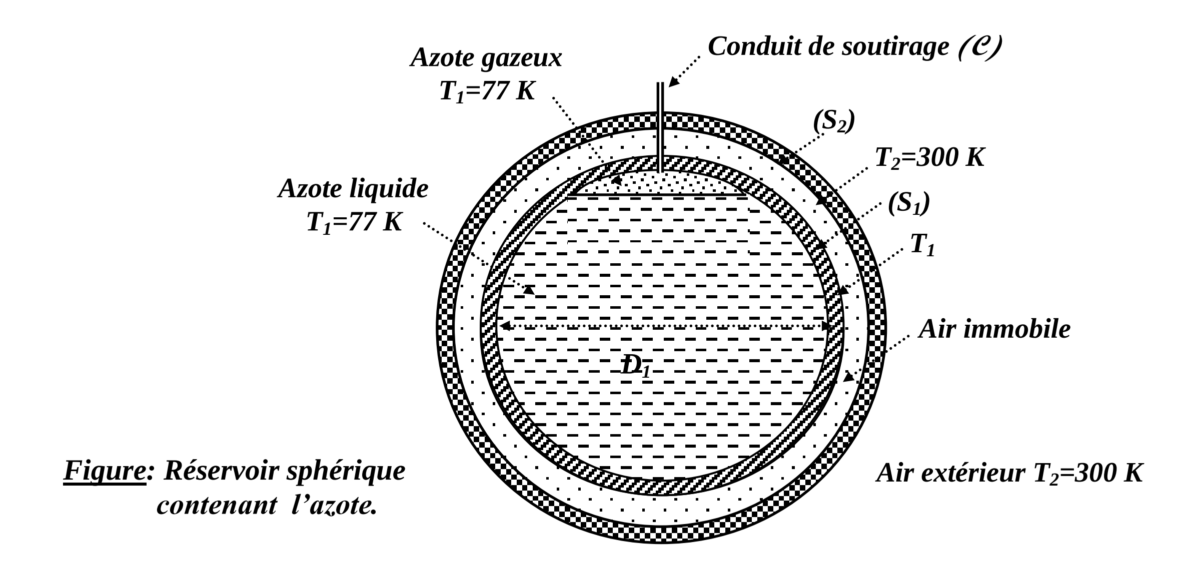


Figure: Réservoir sphérique contenant l'azote.

Solution:

1. Modes de transfert de chaleur en présence :
- conduction à travers la couche d'air immobile comprise entre les deux sphères (S_1) et (S_2);
- rayonnement entre les surfaces des deux sphères mises en regard.

2. Résistance thermique de conduction $R_{cd,a}$ de la couche sphérique d'air situé dans l'espace annulaire compris entre les deux sphères (S_1) et (S_2) et le flux de chaleur Φ_{cd} échangé par conduction entre (S_1) et (S_2).

- Résistance thermique de conduction $R_{cd,a}$:

$$R_{cd,a} = \frac{\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}}{2.\pi.\lambda_a} = \frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}{4.\pi.\lambda_a} \approx 576,65\times10^{-3}\quad °C/W$$

- flux de chaleur Φ_{cd}:

$$\Phi_{cd} = \frac{T_2 - T_1}{R_{cd,a}} \approx 386,7\ W$$

3. Flux radiatif net $\Phi_{r,net:2\to1}$ transféré de la sphère (S_2) vers le réservoir contenant l'azote (sphère (S_1)):

$$\Phi_{r,net:2\to1} = -\Phi_{r,net:1\to2} = -S_1.\mathcal{F}_{12}.\sigma.\left(T_1^4 - T_2^4\right) = 4.\pi.R_1^2.\mathcal{F}_{12}.\sigma.\left(T_2^4 - T_1^4\right)$$

avec:

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}} + \frac{S_1}{S_2}\times\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)}$$

$F_{12} = 1$, car S_1 est complètement entouré par S_2.
Donc :

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} \approx 0,3375$$

Par suite:

$$\Phi_{r,net:2\to1} \approx 1939,4\ W$$

4. On en déduit le flux de chaleur total Φ_{tot} transféré de la sphère (S_2) vers le réservoir contenant l'azote.

$$\Phi_{tot} = \Phi_{cd} + \Phi_{r,net:2\to1} \approx 2326\ W$$

5. Masse initiale d'azote liquide occupant 96% du volume de la sphère:

$$M_{init.} = \rho.V_{init.} = \rho.(0,96.V_{max}) = \rho.\left(0,96.\frac{4}{3}.\pi.R_1^3\right)$$

$$\textit{A.N. :}\quad M_{init.} \approx 3249,16\ Kg$$

6. Temps Δt au bout duquel le réservoir pourra être livré, rempli à 80%.
Le débit volumique d'évaporation de l'azote liquide est défini comme suit:

$$q_v = \frac{dV}{dt} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

et on a aussi :

$$q_v = \frac{\dot{m}}{\rho}$$

$$\frac{\dot{m}}{\rho} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \times \frac{\Phi_{tot}}{L_V} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

D'où on tire l'expression de Δt:

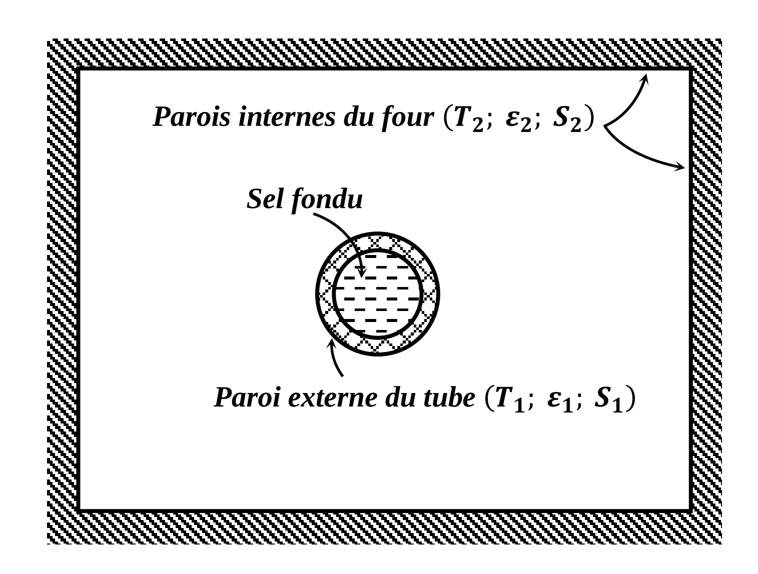
$$\Delta t = -L_V.\rho.\frac{V_{final} - V_{init.}}{\Phi_{tot}} = -L_V.\rho.\frac{(0,8 - 0,96)}{\Phi_{tot}}.V_{max}$$

$$\Delta t = 0,16.\left(\frac{4}{3}.\pi.R_1^3\right).\frac{L_V}{\Phi_{tot}}.\rho$$

$$\textit{A.N. :}\ \Delta t \approx 46563\ s \approx 12\ heures,\ 56\ minutes$$

<u>Exercice I.10</u>: (Extrait du contrôle d'éléments de génie des procédés, LST-PCM, 2012/2013)

Du sel fondu s'écoule, avec un débit massique $\dot{m}_F = 0,4\ Kg/s$, à l'intérieur d'un tube de diamètres interne $D_i = 4\ cm$ et externe $D_e = 4,5\ cm$, de longueur $L = 2,5\ m$ et de conductivité thermique $\lambda = 20\ W/m.°C$. Le sel fondu, fluide caloporteur de chaleur massique $c_p = 1560\ J/Kg.°C$, entre dans le tube à $T_{F,e} = 140°C$ et en sort à $T_{F,s} = 260°C$. Le tube, dont la surface externe est supposée grise d'émissivité $\varepsilon_1 = 0,85$, est chauffé exclusivement par rayonnement dans un four parallélépipédique dont les parois internes sont maintenues à une température constante $T_2 = 1192°C$ et assimilées à un corps noir ($\varepsilon_2 = 1$). Le coefficient de transfert de chaleur par convection entre le sel fondu et la paroi interne du tube est $h_i = 1200\ W/m^2.°C$. On donne: $\sigma = 5,67\times10^{-8}\ W/m^2.K^4$, constante de ***Stefan-Boltzmann***.



1. Citer les modes de transfert de chaleur en présence.
2. Calculer la puissance thermique $\boldsymbol{\Phi}$ reçue par le sel fondu qui provoque son échauffement de $T_{F,e}$ à $T_{F,s}$.
3. En déduire la température T_1 de la paroi externe du tube.
4. Calculer la résistance thermique de conduction R_{cd} de la paroi du tube et la résistance thermique de convection (rayonnement) $R_{CV,i}$ du côté du sel fondu.
5. Tracer le circuit thermique. En déduire la température moyenne T_F du sel fondu; vérifier que $T_F \approx \frac{T_{F,e}+T_{F,s}}{2}$.

Solution:

- Four dont les parois internes sont assimilées à des ***surfaces noires***: ($S_2 \gg S_1$; $T_2 = 1192°C$; $\varepsilon_2 = 1$).
- Tube dont la surface frontière externe est grise: ($D_i = 4\ cm$; $D_e = 4,5\ cm$; $L = 2,5\ m$; $\lambda = 20\ W/m.°C$; $\varepsilon_1 = 0,85$; $S_1 = S_e = \pi.D_e.L$; $S_i = \pi.D_i.L$; T_1 =?).
- Fluide : sel fondu ($h_i = 1200\ W/m^2.°C$; $\dot{m}_F = 0,4\ Kg/s$; $T_{F,e} = 140°C$; $T_{F,s} = 260°C$; $c_{p,F} = 1560\ J/Kg.°C$).

1. Modes de transfert de chaleur en présence :
- ***Convection*** et ***rayonnement*** (négligeable) entre le sel fondu et la paroi interne (S_i) du tube.
- ***Conduction*** à travers la paroi du tube ;
- ***Rayonnement*** et ***convection*** (négligeable) entre la paroi externe du tube et les parois internes du four.

2. Puissance thermique $\boldsymbol{\Phi}$ reçue par le sel fondu provoquant son échauffement de $T_{F,e}$ à $T_{F,s}$:
D'après le bilan enthalpique (***1er*** principe de la thermodynamique appliqué en système ouvert), on a:

$$\Phi = \dot{m}_F \times c_{p,F} \times (T_{F,s} - T_{F,e}) \approx 74880\ W$$

3. Température T_1 de la paroi externe du tube:
La puissance Φ, provenant du four, est transférée par ***rayonnement*** des parois internes du four vers la paroi externe du tube.

$$\Phi = \Phi_{r,net:2\to1} = -\Phi_{r,net:1\to2}$$
$$\Phi = -S_1.\mathcal{F}_{12}.\sigma.(T_1^4 - T_2^4)$$

Avec:

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}} + \frac{S_1}{S_2} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)}$$

Or :
$\varepsilon_2 = 1$, car S_2 est une surface noire
$F_{12} = 1$, car S_1 est complètement entouré par S_2.

Donc :

$$\mathcal{F}_{12} = \varepsilon_1 \approx 0,85$$

$$\Phi = S_1.\varepsilon_1.\sigma.\left(T_2^4 - T_1^4\right) = \pi.D_e.L.\varepsilon_1.\sigma.\left(T_2^4 - T_1^4\right)$$

D'où on tire l'expression de T_1:

$$T_1 = \left[T_2^4 - \frac{\Phi}{\pi.D_e.L.\varepsilon_1.\sigma}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\textit{A.N.:} \quad T_1 = 677\ K = 404°C$$

4. Résistance thermiques

- Résistance thermique de conduction R_{cd} de la paroi du tube

$$R_{cd} = \frac{Ln\left(\frac{D_e}{D_i}\right)}{2 \times \pi \times \lambda \times L} = 3,75 \times 10^{-4}\ °C/W$$

- Résistance thermique de convection (rayonnement) $R_{cv,i}$ du côté du sel fondu.

$$R_{cv,i} = \frac{1}{h_i \times \pi \times D_i \times L} = 2,65 \times 10^{-3}\ °C/W$$

5. Circuit thermique et température moyenne T_F du sel fondu:

a) Circuit thermique :

b) Température moyenne T_F du sel fondu:

D'après le circuit, on a:

$$\Phi = \frac{T_1 - T_F}{R_{cd} + R_{cv,i}} \quad \Rightarrow \ T_F = T_1 - \Phi \times \left(R_{cd} + R_{cv,i}\right) = 177,3°C$$

Ou bien :

$$T_F = T_2 - \Phi \times \left(R_{r,e} + R_{cd} + R_{cv,i}\right) = 177,3°C$$

Avec:

$$R_{r,e} = \frac{T_2 - T_1}{\Phi} = 10,52 \times 10^{-3}\ °C/W$$

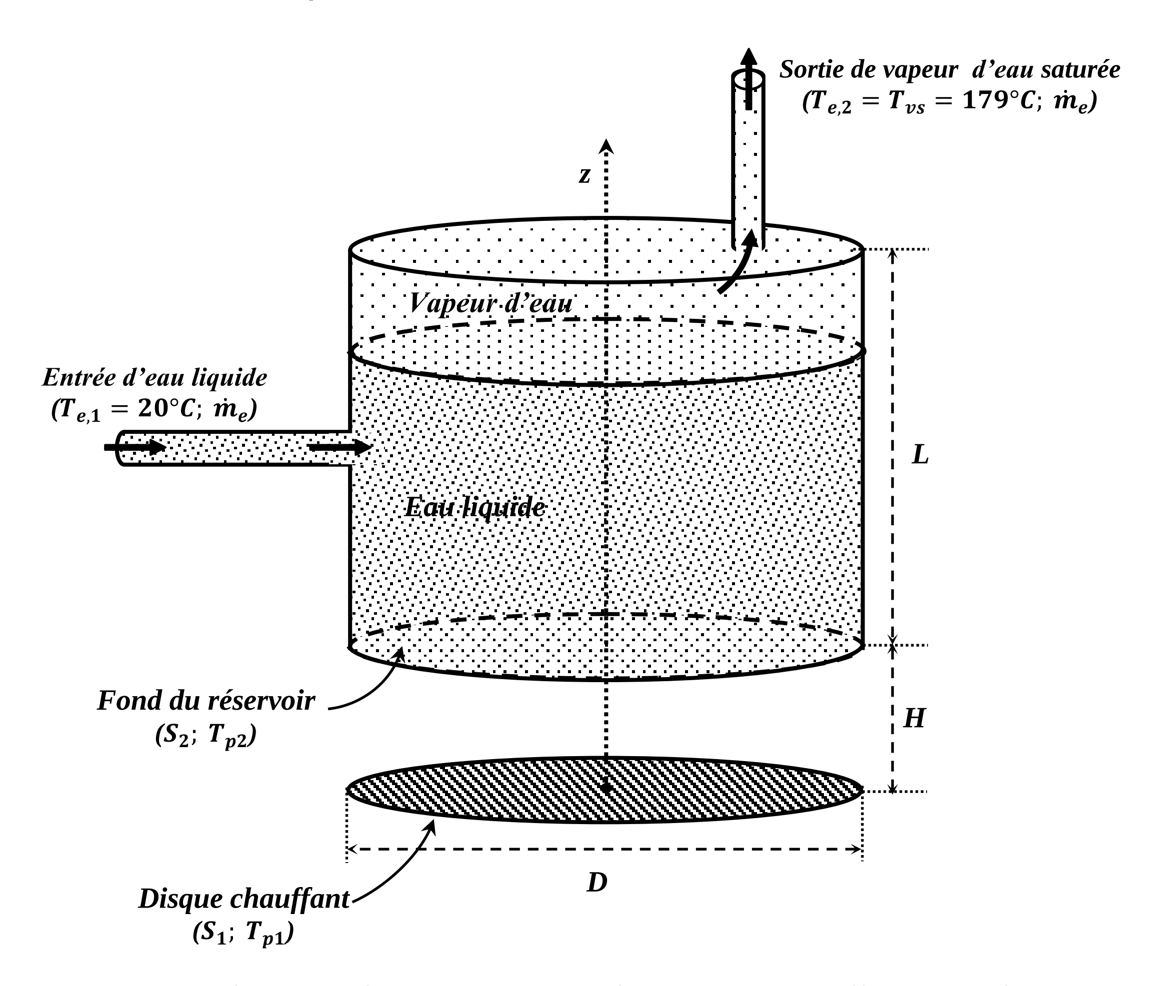
<u>Exercice I.11</u>: (Extrait du contrôle de génie des procédés, 2012/2013)

On considère une chaudière, destinée à la production de vapeur d'eau saturante, constituée d'un réservoir cylindrique de diamètre $D = 1\ m$ et de longueur $L = 1,5\ m$, alimenté en eau froide à $T_{e,1} = 20°C$ avec un débit massique $\dot{m}_e$ inconnu par une pompe imposant la pression dans le réservoir. La sortie vapeur de cette chaudière est équipée d'une vanne de régulation de pression permettant de maintenir une pression $p_{vs} = 10\ bars$ ($T_{vs} = 179°C$) dans le réservoir (équilibre liquide-vapeur). On négligera la résistance thermique de conduction des parois du réservoir et on se

placera en régime permanent de l'installation où le débit massique de vapeur saturante sortant, à $T_{e,2} = T_{vs} = 179°C$, du réservoir est égal au débit massique $\dot{m}_e$ d'eau froide y entrant.
Sur le même axe que le réservoir cylindrique est disposé, à la distance $H = 0,5\ m$, un disque chauffant, de diamètre $D = 1\ m$ de température uniforme $T_{p1} = 500°C$ et de surface S_1, transmettant, par rayonnement, son énergie thermique au fond du réservoir (de température uniforme $T_{p2} = T_{vs} = 179°C$ et de surface S_2). Les émissivités radiatives du disque chauffant et du fond du réservoir sont respectivement prises égales à $\varepsilon_1 = 0,9$ et $\varepsilon_2 = 0,75$. On négligera le transfert de chaleur par convection dans l'espace compris entre le disque chauffant et le fond du réservoir.

On donne :

- Le facteur de forme géométrique du couple de surfaces $(S_1;\ S_2)$:
  $F_{12} = 0,61$ pour $H = 0,5\ m$ et $F'_{12} = 0,905$ pour $H' = 0,1\ m$
- la chaleur latente de vaporisation de l'eau à $p_{vs} = 10\ bars$ et $T_{vs} = 179°C$:
  $$L_V = 2018 \times 10^3\ J/Kg$$
- la chaleur massique de l'eau en phase liquide: $c_p = 4180\ J/Kg.°C$.
- la constante de ***Stefan-Boltzmann***: $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}\ W/m^2.K^4$.



1. Calculer le flux radiatif net $\Phi_{r,net:1\rightarrow 2}$ transféré du disque chauffant vers le fond du réservoir (paroi inférieure).
2. En supposant les parois externes latérale et supérieure du réservoir parfaitement isolées, montrer que le débit massique de vapeur d'eau $\dot{m}_e$, produit par la chaudière, est égal à $2,5 \times 10^{-3}\ Kg/s$.

3. On rapproche le disque chauffant du fond du réservoir à une distance $H' = 0,1\ m$. Calculer la nouvelle température T'_{p1} que doit avoir le disque chauffant pour obtenir le même débit massique de vapeur $\dot{m}_e$.

4. Les parois externes latérale et supérieure du réservoir sont maintenant non isolées (le réservoir étant placé à $H' = 0,1\ m$ au-dessus du disque chauffant). Le réservoir perd de la chaleur par convection et par rayonnement vers l'air environnant supposé à $T_a = 20°C$ et assimilé à un corps noir ($\varepsilon_a = 1$). Le coefficient de transfert de chaleur par convection est pris égal à $h = 7\ W/m^2.°C$.

a) Calculer le flux de chaleur perdu par convection par les parois latérale et supérieure du réservoir supposées avoir des températures uniformes et identiques égales à $179°C$.

b) Calculer le flux de chaleur perdu par rayonnement par les parois latérale et supérieure du réservoir.

c) En déduire la nouvelle température T''_{p1} que doit avoir le disque chauffant pour obtenir le même débit massique de vapeur $\dot{m}_e$.

<u>Solution</u>:

1. Flux radiatif net $\Phi_{r,net:1\to2}$ transféré du disque chauffant vers le fond du réservoir (paroi inférieure).

Il s'agit de deux disques coaxiaux de même diamètre $D_1 = D_2 = D = 1\ m$ et distants de $H = 0,5\ m$. Leur facteur de forme géométrique F_{12} vaut $0,61$.

$$\Phi_{r,net:1\to2} = S_1.\mathcal{F}_{12}.\sigma.\left(T_{p1}^4 - T_{p2}^4\right) = \frac{\pi}{4}.D_1^2.\mathcal{F}_{12}.\sigma.\left(T_{p2}^4 - T_{p1}^4\right)$$

avec:

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{1}{F_{12}}-2} \approx 0,48$$

Par suite :

$$\Phi_{r,net:1\to2} = \frac{\pi}{4}.D^2.\mathcal{F}_{12}.\sigma.\left(T_{p2}^4 - T_{p1}^4\right) \approx 6740\ W$$

2. Le flux de chaleur reçu par le fond du réservoir est intégralement utilisé par l'eau pour s'échauffer de $T_{e,1} = 20°C$ à $T_{e,2} = T_{vs} = 179°C$, et ensuite se vaporiser à pression et température constantes ($p_{vs} = 10\ bars$ et $T_{vs} = 179°C$) :

$$\Phi_{r,net:1\to2} = \dot{m}_e.c_p.\left(T_{vs} - T_{e,1}\right) + \dot{m}_e.L_V(T_{vs})$$

D'où:

$$\dot{m}_e = \frac{\Phi_{r,net:1\to2}}{c_p.\left(T_{vs} - T_{e,1}\right) + L_V(T_{vs})} \approx 2,5 \times 10^{-3}\ Kg/s$$

3. Lorsqu'on rapproche le disque chauffant du fond du réservoir, le facteur de forme géométrique change et devient:

$$F'_{12} = 0,905$$

Le flux radiatif net transféré de S_1 vers S_2 devient :

$$\Phi'_{r,net:1\to2} = S_1.\mathcal{F}'_{12}.\sigma.\left(T'^4_{p1} - T_{p2}^4\right)$$

avec:

$$\mathcal{F}'_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{1}{F'_{12}}-2} \approx 0,645$$

Avoir le même débit massique c'est avoir le même flux radiatif net que dans le cas précédent :

$$\Phi'_{r,net:1\to2} = \Phi_{r,net:1\to2}$$

D'où:

$$T'_{p1} = \left(\frac{4 \times \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{F'_{12}} - 2 \right) \times \Phi_{r,net:1\to 2}}{\pi \times D^2 \times \sigma} + T_{p2}^4 \right)^{\frac{1}{4}}$$

A.N. : $T'_{p1} \approx 725\ K = 452°C$

4. Les parois externes latérale et supérieure du réservoir sont maintenant non isolées. La chaleur est perdue par le réservoir par convection et rayonnement vers l'air environnant.

a) Flux de chaleur perdu par convection par la paroi latérale (S_L) et la paroi supérieure (S_3) du réservoir:

$$\Phi_{cv} = h \times (S_L + S_3) \times (T_S - T_a)$$
$$\Phi_{cv} = h \times \pi \times D \times \left(L + \frac{D}{4} \right) \times (T_{vs} - T_a) \approx 6119\ W$$

b) Flux de chaleur perdu par rayonnement par la paroi latérale (S_L) et la paroi supérieure (S_3) du réservoir:

$$\Phi_{r,net:R\to a} = \Phi_{r,net:RL\to a} + \Phi_{r,net:R3\to a} = S_1.\mathcal{F}'_{12}.\sigma.\left(T'^4_{p1} - T^4_{p2} \right)$$

$$\Phi_{r,net:R\to a} = S_L.\mathcal{F}_{La}.\sigma.\left(T_L^4 - T_a^4 \right) + S_3.\mathcal{F}_{3a}.\sigma.\left(T_3^4 - T_a^4 \right)$$

avec:

$$\mathcal{F}_{La} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_L} - 1 + \frac{1}{F_{La}} + \frac{S_L}{S_{a,L}} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_a} - 1 \right)} = \varepsilon_L = \varepsilon_2 = 0,75$$

et

$$\mathcal{F}_{3a} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_3} - 1 + \frac{1}{F_{3a}} + \frac{S_3}{S_{a,3}} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_a} - 1 \right)} = \varepsilon_3 = \varepsilon_2 = 0,75$$

De meme, on a:

$$T_L = T_3 = T_{vs}$$

D'où:

$$\Phi_{r,net:R\to a} = (S_L + S_3).\varepsilon_2.\sigma.\left(T_{vs}^4 - T_a^4 \right) = \pi.D.\left(L + \frac{D}{4} \right).\varepsilon_2.\sigma.\left(T_{vs}^4 - T_a^4 \right)$$

A.N. : $\Phi_{r,net:R\to a} \approx 8035\ W$

c) La puissance thermique fournie par le disque chauffant est maintenant divisée en une puissance utile reçue par l'eau et une puissance perdue à travers les parois du réservoir.

$$\Phi''_{r,net:1\to 2} = \Phi_{utile} + \Phi_{perdue}$$
$$\Phi''_{r,net:1\to 2} = \dot{m}_e.\left[c_p.\left(T_{vs} - T_{e,1} \right) + L_V(T_{vs}) \right] + \Phi_{cv} + \Phi_{r,net:R\to a}$$

Cette relation devient en remplaçant $\Phi''_{r,net:1\to 2}$ par son expression :

$$\frac{S_1.\sigma.\left(T''^4_{p1} - T^4_{p2} \right)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{F'_{12}} - 2} = \dot{m}_e.\left[c_p.\left(T_{vs} - T_{e,1} \right) + L_V(T_{vs}) \right] + \Phi_{cv} + \Phi_{r,net:R\to a}$$

D'où on tire la température T''_{p1} que doit avoir le disque chauffant pour obtenir le même débit massique de vapeur $\dot{m}_e$:

$$T''_{p1} = \left[\frac{4 \times \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{F'_{12}} - 2 \right) \times \left(\overbrace{\dot{m}_e . \left[c_p . \left(T_{vs} - T_{e,1} \right) + L_V(T_{vs}) \right]}^{= \Phi_{r,net:1 \to 2}} + \Phi_{cv} + \Phi_{r,net:R \to a} \right)}{\pi \times D^2 \times \sigma} + T_{p2}^4 \right]^{\frac{1}{4}}$$

A.N. : $T'_{p1} \approx 936,5\ K = 663,5°C$

Partie II: Conduction thermique

II.1. Isolation thermique: résistances thermiques et structures composites

***Exercice II.1**: (Extrait de TD de génie des procédés II, IGM2_2013/2014)*

La porte d'un four industriel, de surface $\mathbf{2\,m \times 4\,m}$, doit être isolée pour réduire les pertes de chaleur à $\mathbf{1200\,W/m^2}$ (*figure 1.a*). Cette porte est constituée de deux plaques d'acier ($\lambda = \mathbf{25\,W/m.°C}$) entre lesquelles on doit intercaler une couche de matériau isolant d'épaisseur convenable (*figure 1.b*). La plaque d'acier intérieure est d'épaisseur $\mathbf{e_1 = 10\,mm}$, alors que la plaque d'acier extérieure est d'épaisseur $\mathbf{e_2 = 7\,mm}$. La température des gaz chauds à l'intérieur du four est de $\mathbf{1200°C}$ et le coefficient global d'échange de chaleur (convection+rayonnement) entre ces gaz et la paroi interne de la porte est de $\mathbf{20\,W/\,m^2.°C}$. La température de l'air ambiant à l'extérieur du four est de $\mathbf{20°C}$ et le coefficient d'échange de chaleur entre l'air et la paroi externe de la porte est de $\mathbf{5\,W/\,m^2.°C}$.
En utilisant les données du tableau suivant, choisir un matériau d'isolation adéquat ainsi que son épaisseur.

Matériau	($\lambda\,(W/m.°C)$)	*Gamme de température*
Briques réfractaires	$\mathbf{1,09}$	***Résiste bien aux températures élevées*** ($T \sim 1200°C$)
Fibres de silice	$\mathbf{0,115}$	***Résiste bien aux températures élevées*** ($T \sim 1200°C$)
Laine de verre	$\mathbf{0,045}$	***Température de fusion*** $T_F \sim 1000°C$
Polystyrène	$\mathbf{0,037}$	***Température de fusion*** $T_F = 240°C$

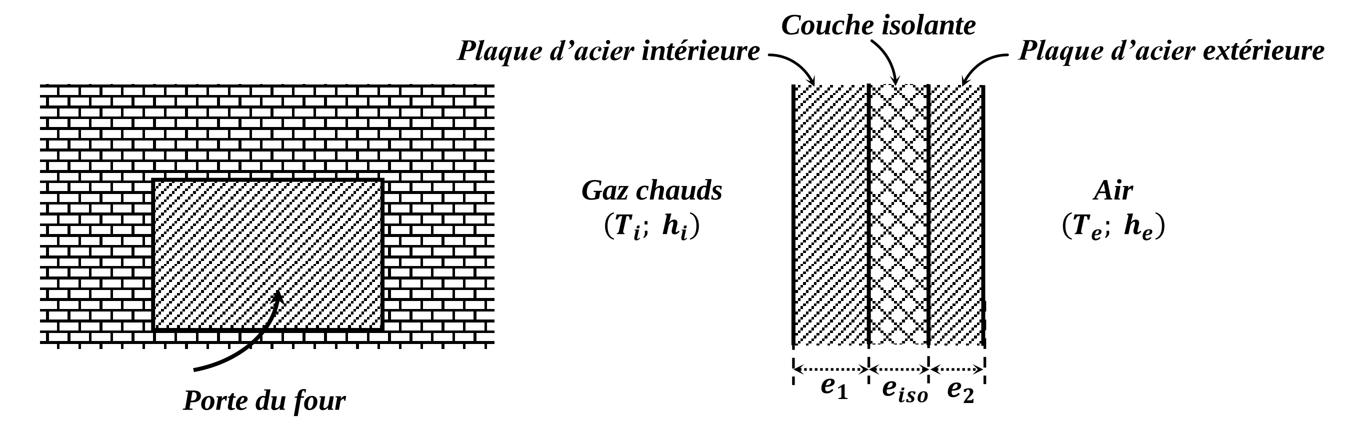


***Figure 1.a**: paroi du four contenant la porte.*

***Figure 1.b**: couches de matériaux constituant la porte du four.*

Solution:

On considère la porte d'un four industriel de surface $\mathbf{S = L \times H = 2m \times 4m}$ constitué de :

- une plaque d'acier ($\mathbf{1}$), située du côté des gaz chauds, de conductivité $\mathbf{\lambda_1 = 25\,W/m.°C}$ et d'épaisseur $\mathbf{e_1 = 10\,mm}$;
- une couche de matériau isolant de conductivité λ_{iso} et d'épaisseur e_{iso};
- une plaque d'acier ($\mathbf{2}$), située du côté de l'air ambiant, de conductivité $\lambda_2 = \lambda_1$ et d'épaisseur $\mathbf{e_2 = 7\,mm}$;

- Les gaz chauds à l'intérieur du four sont caractérisés par : $\mathbf{T_i = 1200°C}$ et $\mathbf{h_i = 20\,W/\,m^2.°C}$ (h_i regroupe l'effet de la convection avec celui du rayonnement).
- L'air à l'extérieur est caractérisé par: $\mathbf{T_e = 20°C}$ et $\mathbf{h_e = 5\,\,W/\,m^2.°C}$

Hypothèse : on supposera que le contact thermique est parfait sur les différentes interfaces.

- Circuit thermique :

$$\Phi \rightarrow T_i \; [R_i] \; T_{pi} \; [R_{cd,1}] \; T_1 \; [R_{cd,iso}] \; T_2 \; [R_{cd,2}] \; T_{pe} \; [R_e] \; T_e$$

où:

- R_i est la résistance thermique de convection-rayonnement du côté des gaz chauds en contact avec la surface frontière interne (S_i) de la porte du four:

$$R_i = \frac{1}{h_i \times S_i} = \frac{1}{h_i \times L \times H} = 6,25 \times 10^{-3} \ °C/W$$

- R_e est la résistance thermique de convection-rayonnement (négligeable) du côté de l'air extérieur en contact avec la surface frontière externe (S_e) de la porte du four:

$$R_e = \frac{1}{h_e \times S_e} = \frac{1}{h_e \times L \times H} = 25 \times 10^{-3} \ °C/W$$

- $R_{cd,1}$ est la résistance thermique de conduction de la plaque d'acier située du côté des gaz chauds:

$$R_{cd,1} = \frac{e_1}{\lambda_1 \times S} = \frac{e_1}{\lambda_1 \times L \times H} = 5 \times 10^{-5} \ °C/W$$

- $R_{cd,2}$ est la résistance thermique de conduction de la plaque d'acier située du côté de l'air extérieur:

$$R_{cd,2} = \frac{e_2}{\lambda_2 \times S} = \frac{e_2}{\lambda_2 \times L \times H} = 3,5 \times 10^{-5} \ °C/W$$

- $R_{cd,iso}$ est la résistance thermique de conduction de la couche isolante interposée entre les plaques d'acier:

$$R_{cd,iso} = \frac{e_{iso}}{\lambda_{iso} \times S} = \frac{e_{iso}}{\lambda_{iso} \times L \times H}$$

Pour réduire le flux de chaleur φ traversant l'unité de surface de la porte du four à $1200 \ W/m^2$, il faudra que l'isolant choisi résiste bien aux températures situées dans la gamme $[T_1;\ T_2]$ et que son épaisseur e_{iso} soit relativement faible.

Calculons les valeurs de T_1 et T_2 :
D'après le circuit thermique, on a :

$$\Phi = \frac{T_i - T_1}{R_i + R_{cd,1}} \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_i - \Phi \times (R_i + R_{cd,1}) \approx 1139,5°C$$

et aussi :

$$\Phi = \frac{T_2 - T_e}{R_e + R_{cd,2}} \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_e + \Phi \times (R_e + R_{cd,2}) \approx 260,3°C$$

D'après le tableau des matériaux isolants proposés, on constate que le polystyrène, qui fond à 240°C, ne peut pas être utilisé puisqu'il ne résistera pas aux températures situées dans la gamme $[T_1;\ T_2] = [260°C; 1139\ °C]$. On fait la même remarque pour la laine de verre.

Donc, seules les briques réfractaires et les fibres de silice résistent aux températures situées dans la gamme $[T_1;\ T_2] = [260°C; 1139\ °C]$. Pour choisir entre ces deux matériaux, on calcule l'épaisseur requise par chacun d'eux : $e_{iso} =$?

D'après le circuit thermique, on a:

$$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{cd,iso}} = \lambda_{iso} \times S \times \frac{T_1 - T_2}{e_{iso}}$$

$$\Rightarrow \quad e_{iso} = \lambda_{iso} \times \frac{T_1 - T_2}{\varphi}$$

Tous calculs faits, on obtient les résultats suivants :

Matériau isolant	λ_{iso} $(W/m.°C$	e_{iso} (cm)
Briques réfractaires	$1,09$	$79,86 \approx 80$
Fibres de silice	$0,115$	$8,42$

On constate que :

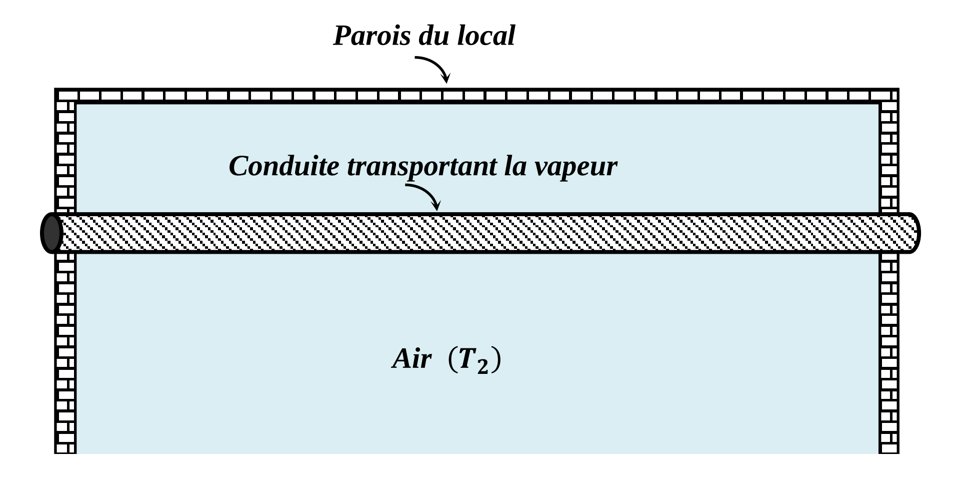
- Dans le cas de briques réfractaires, on va obtenir une couche isolante trop épaisse pour être utilisée car elle conduira à une porte très lourde.
- Dans le cas de fibres de silice, on va obtenir une couche isolante mince ; ce qui représente une solution plus appropriée.

On conclut que les fibres de silice représentent l'isolant thermique adéquat.

***Exercice II.2*: (Extrait de TD de génie des procédés, IGM2_2013/2014)**

Une conduite, de diamètre externe $D = 0,5\,m$ d'émissivité $\varepsilon = 0,9$, transporte de la vapeur. La conduite dont la surface externe est portée à la température $T_1 = 227°C$ se trouve dans un local de température $T_2 = 27°C$ (*figure ci-dessous*). Le coefficient de transfert de chaleur par convection entre la surface de la conduite et l'air dans le local est de $20\,W/m^2.°C$. On assimile l'air à un corps noir.

1. Calculer le coefficient de transfert de chaleur par rayonnement, noté h_r.
2. Calculer les résistances thermiques de convection et de rayonnement au niveau de la surface externe de la conduite.
3. En déduire les pertes thermiques par unité de longueur de la conduite.



Solution:

- Conduite cylindrique dont la paroi externe est assimilée à une ***surface grise***: ($D_e = D = 0,5\,m$; L; $S_1 = \pi.D.L$; $T_1 = 227°C$; $\varepsilon_1 = \varepsilon = 0,9$).
- Air environnant assimilé à ***un corps noir*** : ($h_c = 20\,W/m^2.°C$; $T_2 = T_a = 27°C$; $S_2 \approx S_1$; $\varepsilon_2 = 1$).

1. Coefficient de transfert de chaleur par rayonnement, noté h_r.

Pour le calculer, il suffit de linéariser l'expression du flux radiatif net transféré de la surface frontière externe de la conduite vers l'air environnant:

$$\Phi_{r,net:1\to 2} = S_1 . \mathcal{F}_{12} . \sigma . \left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

avec:

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}} + \frac{S_1}{S_2} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)}$$

Or :

$F_{12} = 1$, car la surface externe de la conduite S_1 est complètement entourée par S_2 (couches d'air entourant S_1).
$\varepsilon_2 = 1$, car l'air est assimilé à ***un corps noir***
Donc :

$$\mathcal{F}_{12} = \varepsilon_1 = \varepsilon$$

$$\Phi_{r,net:1\to 2} = S_1 . \varepsilon . \sigma . \left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

On montre que pour $|T_1 - T_2| > 100°C$, h_r est donné par :

$$h_r = \frac{\Phi_{r,net:1\to 2}}{S_1 \times (T_1 - T_2)} = \varepsilon \times \sigma \times \frac{T_1^4 - T_2^4}{T_1 - T_2}$$

Soit encore :

$$h_r = \varepsilon \times \sigma \times (T_1 + T_2) \times \left(T_1^2 + T_2^2\right) \approx 13,9\ W / m^2.°C.$$

Le coefficient global d'échange thermique est donc égal à :

$$h = h_r + h_c = 33,9\ W / m^2.°C$$

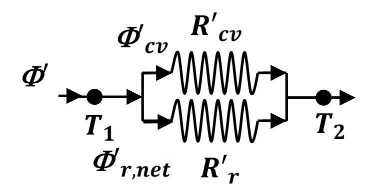
2. Résistances thermiques de convection et de rayonnement au niveau de la surface externe de la conduite

$$R'_{cv} = R_{cv} \times L = \frac{L}{h_c \times S_1} = \frac{1}{h_c \times \pi \times D} \approx 31,83 \times 10^{-3}\ m.°C/W$$

$$R'_r = R_r \times L = \frac{L}{h_r \times S_1} = \frac{1}{h_r \times \pi \times D} \approx 45,8 \times 10^{-3}\ m.°C/W$$

3. Pertes thermiques par unité de longueur de la conduite :

- Circuit thermique



D'après le circuit, on a :

$$\Phi' = \frac{T_1 - T_2}{R'_r // R'_{cv}} = \frac{R'_r + R'_{cv}}{R'_r \times R'_{cv}} \times (T_1 - T_2)$$

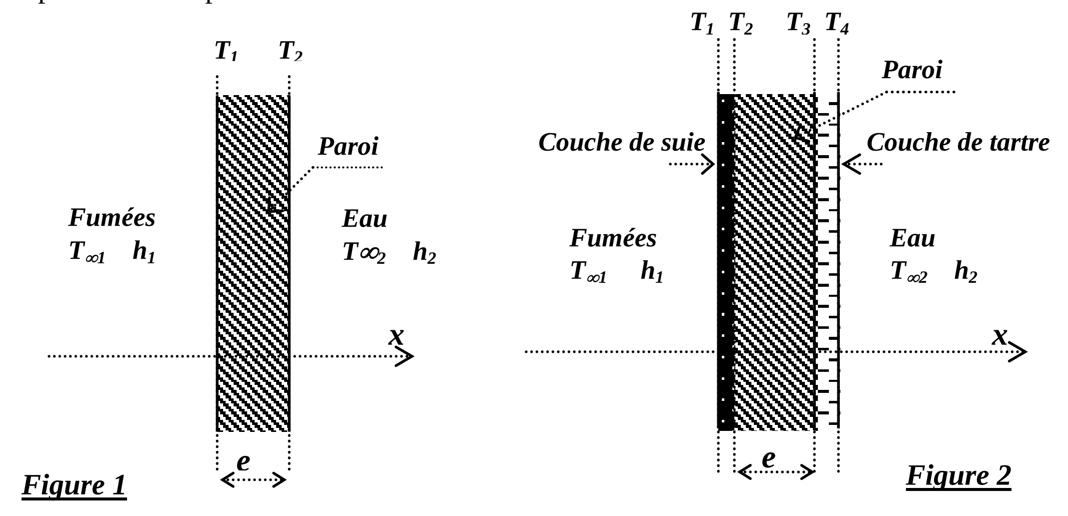
$$A.N.: \quad \Phi' \approx 10650\ W/m$$

Exercice II.3:

On considère la paroi plane d'une chaudière à vapeur (***fig.1***) séparant les fumées et l'eau surchauffée, à $T_{\infty 1}=1000°C$ et $T_{\infty 2}=200°C$ respectivement.
On donne:

- coefficient de transfert de chaleur par convection fumées-paroi $h_1=86\ Kcal/h.m^2.°C$;
- coefficient de transfert de chaleur par convection paroi-eau $h_2=4036\ Kcal/h.m^2.°C$;
- conductivité thermique de la paroi $\lambda=50\ W/m.K$;

- épaisseur de la paroi ***e=12mm***.



1. Décrire, en illustrant par un schéma, les modes de transfert de chaleur en présence.
2. Représenter le schéma électrique équivalent montrant les différentes résistances thermiques rencontrées par le flux.
3. Déterminer l'expression du flux φ_1 traversant ***1 m²*** de la paroi. En déduire l'expression de la température ***T(x)*** à l'intérieur de la paroi.
4. Calculer les valeurs numériques de φ_1, T_1 et T_2.
5. Représenter les profils de température.
6. Après un certain temps de fonctionnement, la paroi est recouverte ***(fig.2):***

- du côté des fumées par une couche de suie, d'épaisseur $e_1=1\ mm$ et de conductivité $\lambda_1=0{,}08\ W/m.°C$;
- du côté de l'eau par une couche de tartre, d'épaisseur $e_2=2mm$ et de conductivité $\lambda_2=0{,}8\ W/m.°C$;

On suppose que h_1 et h_2 restent inchangés, et on note φ_2 le nouveau flux traversant $1\ m^2$ de la paroi.

6-a) Représenter le schéma électrique équivalent montrant les différentes résistances rencontrées par le flux.

6-b) Comparer (sans faire de calcul) φ_1 et φ_2.

6-c) Calculer φ_2.

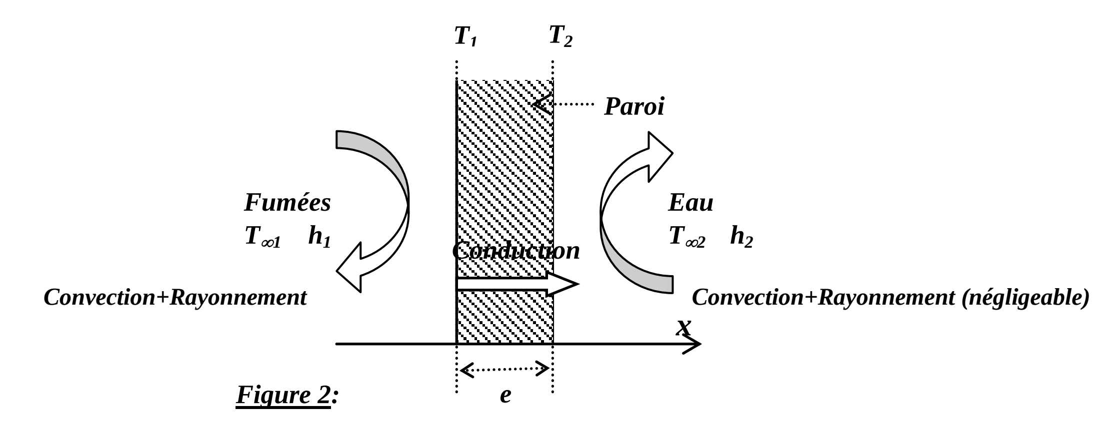
6-d) Calculer φ_2/φ_1. Quel impact peut avoir ce résultat sur le fonctionnement de la chaudière?

7. Conclure en proposant une solution.

<u>Solution</u>:

1. ***<u>Schéma descriptif</u>***::

Ce schéma décrit les différents modes de transfert thermique en présence:



<u>Figure 2</u>:

2. Schéma électrique équivalent:

Φ_1 → $T_{\infty 1}$ — $R_{cv,1}$ — T_1 — R_{cd} — T_2 — $R_{cv,2}$ — $T_{\infty 2}$ →

avec :

$R_{cv1} = \dfrac{1}{h_1 S}$: résistance thermique de convection,

$R_{cv2} = \dfrac{1}{h_2 S}$: résistance thermique de convection,

$R_{cd} = \dfrac{e}{\lambda S}$: résistance thermique de conduction.

3. Flux thermique:

D'après le circuit thermique, on a:

$$\varphi_1 = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{cv1} + R_{cd} + R_{cv2}}$$

Ce flux thermique s'écrit également:

$$\varphi_1 = \frac{T_{\infty 1} - T(x)}{R_{cv1} + R_{cd}(x)}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_1 = \frac{T_{\infty 1} - T(x)}{\dfrac{1}{S.h_1} + \dfrac{x}{S.\lambda}}$$

On en déduit la distribution de température à l'intérieur de la paroi de la chaudière:

$$T(x) = T_{\infty 1} - \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{cv1} + R_{cd} + R_{cv2}} \left(\frac{x}{\lambda S} + R_{cv1} \right)$$

4. Application numérique:

Application numérique:

- Flux thermique:

$$\varphi_1 \approx 65820 \text{ kcal/h}$$
$$\text{ou} \quad \varphi_1 \approx 76{,}42 \text{ KW}$$

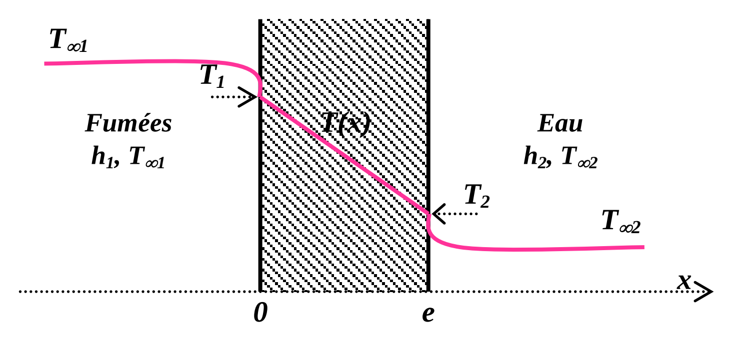
- Températures T_1 et T_2:

D'après le circuit thermique, on a:

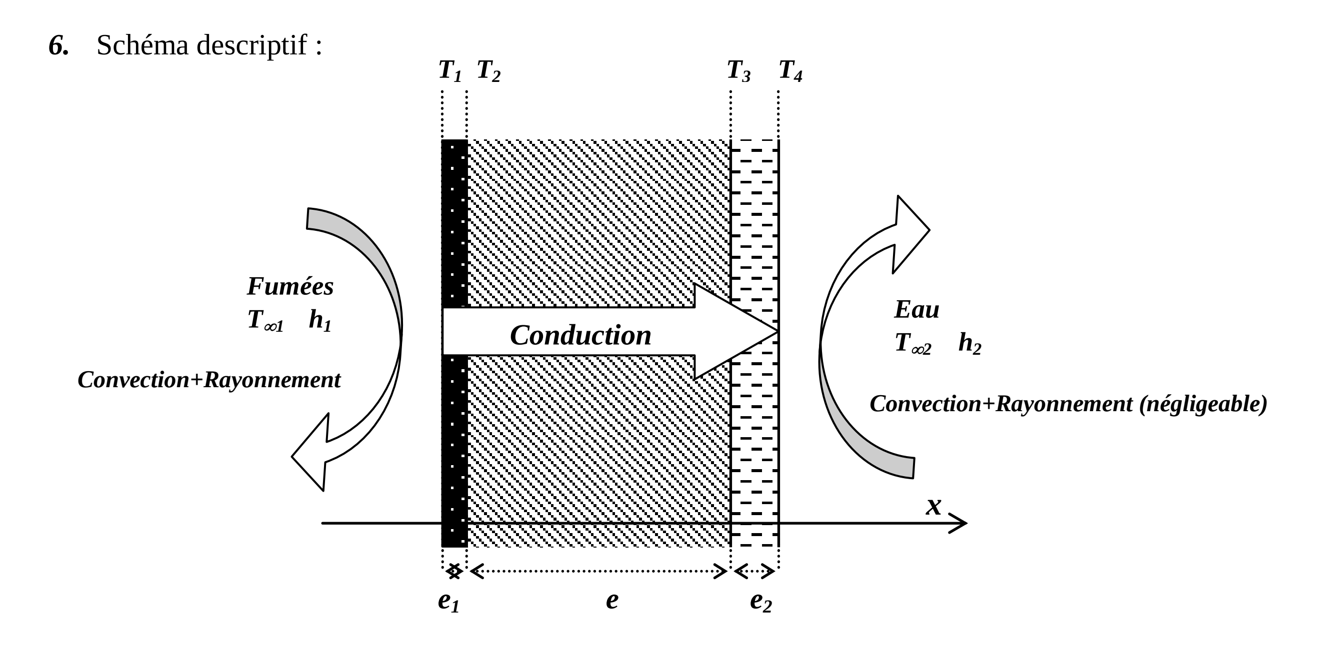
$$T_1 = T_{\infty 1} - R_{cv1}\varphi_1 \quad \text{et} \quad T_2 = T_{\infty 2} + R_{cv2}\varphi_1$$

A.N: $T_1 \approx 234{,}7°C$ et $T_2 \approx 216°C$

5. Profils de température :



6. Schéma descriptif :



6-a) Schéma électrique équivalent :

$\Phi_2 \rightarrow T_{\infty 1} \; R_{cv,1} \; T_1 \; R_{cd,1} \; T_2 \; R_{cd} \; T_3 \; R_{cd,2} \; T_4 \; R_{cv,2} \; T_{\infty 2}$

avec:

$R_{cd\,1} = \dfrac{e_1}{\lambda_1 S}$: résistance thermique de conduction de la couche de suie;

$R_{cd\,2} = \dfrac{e_2}{\lambda_2 S}$: résistance thermique de conduction de la couche de tartre.

6-b) $\varphi_2 < \varphi_1$ car il y a addition de deux résistances thermiques de conduction (couches de suie et de tartre).

6-c) Flux thermique:
D'après le circuit thermique, on a:

$$\varphi_2 = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{cv1} + R_{cd\,1} + R_{cd} + R_{cd\,2} + R_{cv2}}$$

A.N. : $\varphi_2 \approx 27054 \; Kcal/h.m^2$

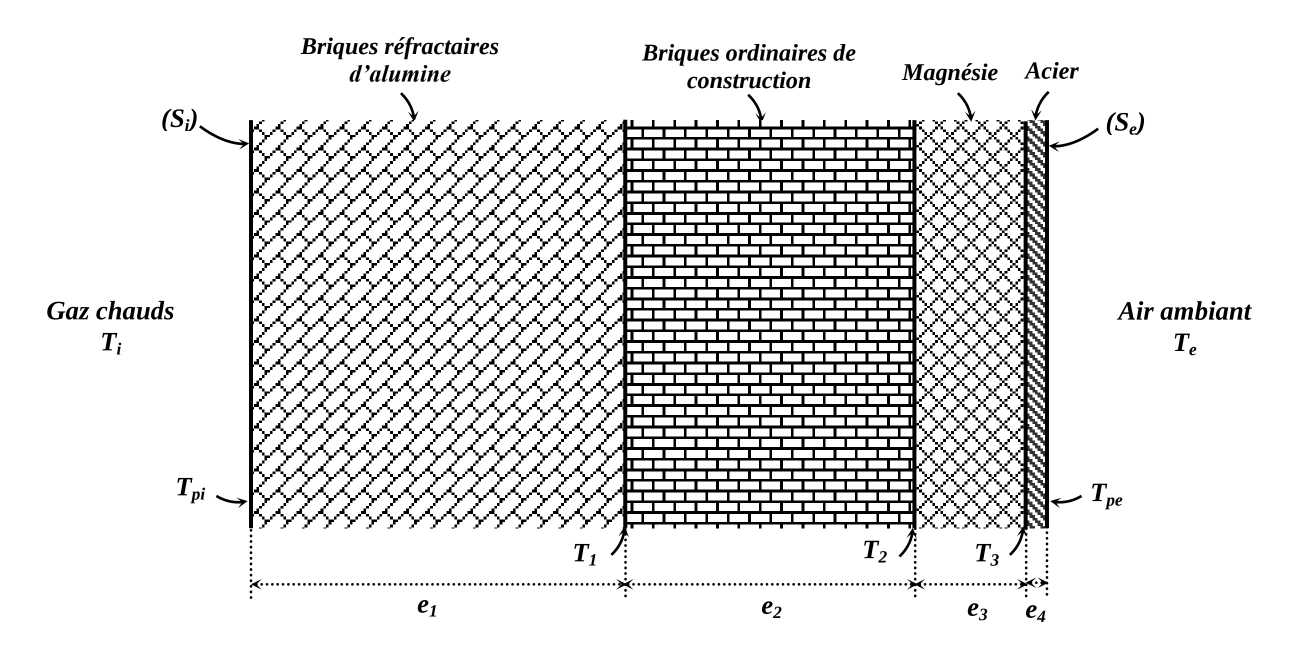
6-d) On obtient:

$$\varphi_2/\varphi_1 = 41\%$$

On constate une diminution du flux thermique ce qui a pour effet de réduire le rendement de la chaudière et donc d'augmenter le temps de chauffage.

7-On doit nettoyer la chaudière.

<u>Exercice II.4</u>: (Extrait de TD de GP_IGM2-2012/2013 et du contrôle de EGP_PCM-2010/2011)
La paroi composite d'un four industriel est constituée de plusieurs couches de matériaux comme l'indique le schéma ci-dessous.



La surface intérieure de la paroi du four reçoit un flux net $\varphi_{r,net,i}$**=750 W/m²** par rayonnement à partir des gaz chauds à T_i**=1504°C**. La température de l'air ambiant à l'extérieur est T_e. La température sur la surface interne de la paroi est T_{pi}**=1429°C**. Le coefficient d'échange thermique par convection, entre les gaz chauds et la surface intérieure (S_i) de la paroi composite du four, est $h_{C,i}$**=10 W/m².°C**. Le coefficient d'échange thermique par convection (rayonnement), entre l'air ambiant et la surface extérieure (S_e) de la paroi composite du four, est h_e**=10 W/m².°C**.

Les épaisseurs (e_j) et les conductivités thermiques (λ_j) des divers matériaux sont regroupées dans le tableau suivant:

Matériau	*Briques réfractaires d'alumine*	*Briques ordinaires de construction*	*Magnésie*	*Acier*
Epaisseur e_j ***(cm)***	$e_1=25$	$e_2=12,5$	$e_3=5$	$e_4=0,3$
Conductivité λ_j ***(W/m.°C)***	$\lambda_1=1,62$	$\lambda_2=1,39$	$\lambda_3=0,085$	$\lambda_4=45$

1. Citer les modes de transfert de chaleur en présence.
2. Calculer la densité de flux thermique φ reçue par la paroi composite de la part des gaz chauds.
3. Calculer:
   - la résistance thermique de conduction, par m^2, $r_{cd,eq}$ de la paroi composite,
   - la résistance thermique de convection (rayonnement), par m^2, r_e sur la surface externe (S_e),
   - la résistance thermique de convection, par m^2, $r_{cv,i}$ sur la surface interne (S_i),
   - la résistance thermique de rayonnement, par m^2, $r_{r,i}$ sur la surface interne (S_i).
4. Représenter le circuit thermique.
5. Déterminer les températures sur les différentes surfaces de séparation, de l'intérieur vers l'extérieur du four T_1, T_2, T_3 et T_{pe} ainsi que la température T_e de l'air à l'extérieur (voir schéma).
6. Quelle réduction, en pourcentage, de flux de chaleur traversant la paroi du four obtiendrait-on si on remplaçait la couche de magnésie par une couche, de même épaisseur, de laine de verre (λ_3**=0,04 W/m.°C**), avec T_i**=1504°C**, T_e**=30°C** et $h_e=0,5\times h_i$**=10 W/m².°C**?

Solution:

1. Modes de transfert de chaleur en présence :

- convection et rayonnement entre les gaz chauds et la surface interne de la paroi du four,
- conduction à travers les quatre couches de matériaux composant la paroi du four,
- convection et rayonnement (négligeable) entre la surface externe de la paroi du four et l'air ambiant.

2. Calcul de la puissance thermique φ reçue par la surface interne de la paroi du four

$$\varphi = \varphi_{r,net} + \varphi_{cv} = \varphi_{r,net} + h_{ci}.\left(T_i - T_{pi}\right)$$

$$\textit{A.N.}: \quad \varphi \approx 1500\ W/m^2$$

3. Résistances thermiques :

- Résistance thermique de conduction, par m^2, $r_{cd,eq}$ de la paroi composite :

$$r_{cd,eq} = \sum_{j=1}^{4} r_{cd,j} = \sum_{j=1}^{4} \frac{e_j}{\lambda_j}$$

$$\textit{A.N.}: \ r_{cd,eq} \approx 832,55 \times 10^{-3}\ \ m^2.°C/W$$

- Résistance thermique de convection (rayonnement), par m^2, r_e sur la surface externe (S_e)

$$r_e = \frac{1}{h_e} = 0,1\ \ m^2.°C/W$$

- Résistance thermique de convection, par m^2, $r_{cv,i}$ sur la surface interne (S_i)

$$r_{cv,i} = \frac{1}{h_{ci}} = 0,1\ \ m^2.°C/W$$

- Résistance thermique de rayonnement, par m^2, $r_{r,i}$ sur la surface interne (S_i)

$$r_{cv,i} = \frac{\Delta T}{\varphi_{r,net}} = \frac{\left(T_i - T_{pi}\right)}{\varphi_{r,net}} = 0,1\ \ m^2.°C/W$$

4. Circuit thermique

φ → T_i → [φ_{cv} : $r_{cv,i}$ ∥ $\varphi_{r,net}$: $r_{r,i}$] → T_{pi} → $r_{cd,1}$ → T_1 → $r_{cd,2}$ → T_2 → $r_{cd,3}$ → T_3 → $r_{cd,4}$ → T_{pe} → r_e → T_e

⇕

φ → T_i → [φ_{cv} : $r_{cv,i}$ ∥ $\varphi_{r,net}$: $r_{r,i}$] → T_{pi} → $r_{cd,eq}$ → T_{pe} → r_e → T_e

5. Températures sur les différentes surfaces de séparation, de l'intérieur vers l'extérieur du four T_1, T_2, T_3 et T_{pe} ainsi que la température T_e de l'air à l'extérieur (voir schéma).

D'après le circuit thermique, on a :

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{T_{pi} - T_1}{r_{cd,1}} \\ \varphi = \dfrac{T_{pi} - T_{pe}}{r_{cd,eq}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = T_{pi} - \varphi \times r_{cd,1} \approx 1197,5°C \\ T_{pe} = T_{pi} - \varphi \times r_{cd,eq} \approx 180,2°C \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{T_{pe} - T_e}{r_e} \\ \varphi = \dfrac{T_3 - T_{pe}}{r_{cd,4}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_e = T_{pe} - \varphi \times r_e \approx 30,2°C \\ T_3 = T_{pe} + \varphi \times r_{cd,4} \approx 180,3°C \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{T_2 - T_3}{r_{cd,3}} \Rightarrow T_2 = T_3 + \varphi \times r_{cd,3} \approx 1062,6°C$$

ou bien :

$$\varphi = \frac{T_1 - T_2}{r_{cd,2}} \Rightarrow T_2 = T_1 - \varphi \times r_{cd,2} \approx 1062,6°C$$

6. Si on remplaçait la couche de magnésie par une couche, de même épaisseur, de laine de verre (***λ_3=0,04 W/m.°C***), on obtiendrait le flux de chaleur suivant:

$$\varphi' = \frac{T_i - T_e}{r_i + r'_{cd,eq} + r_e}$$

avec :

$$r_i = r_{cv,i} // r_{r,i} = 0,05 \ \ m^2.°C/W$$

$$r'_{cd,eq} = r_{cd,1} + r_{cd,2} + r'_{cd,3} + r_{cd,4} \approx 1494,32 \times 10^{-3} \ \ m^2.°C/W$$

Donc :

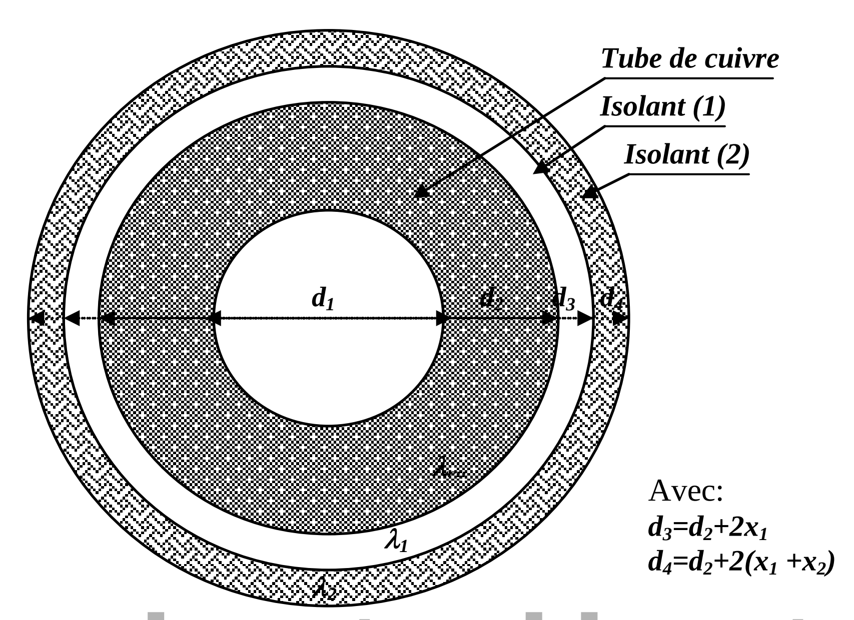
$$\varphi' \approx 896,42 \ W/m^2$$

La réduction, en pourcentage, du flux de chaleur traversant la paroi du four serait égale à:

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi}\% = \frac{\varphi' - \varphi}{\varphi} \times 100 \approx -40,2\%$$

***Exercice II.5*:**

On veut isoler un tube de cuivre de diamètres intérieur ***d_1=20 mm*** et extérieur ***d_2=27 mm***, de longueur ***L=1 m*** et de conductivité thermique ***λ_{cu}=330 Kcal/h.m.°C***, à l'aide de deux isolants de conductivités thermiques respectives: ***λ_1=0,1 Kcal/h.m.°C*** et ***λ_2=0,05 Kcal/h.m.°C***. L'ensemble doit avoir une résistance thermique minimale de ***1,04 h.°C/Kcal*** et un diamètre extérieur maximal de ***45 mm***. Déterminer les caractéristiques de cette isolation (épaisseur de chacun des isolants).



Solution:

Il faut que : $\begin{cases} R_{th} \geq R_{th/\min} = 1{,}04\ °C.m.h/Kcal & (1) \\ d_{ext} \leq d_{\max} = 45mm & (2) \end{cases}$

Par ailleurs, la résistance thermique totale s'écrit :

$$R_{th} = R_{Cu} + R_1 + R_2$$

$$R_{th} = \frac{1}{2\pi L}\left[\frac{Ln(\frac{d_2}{d_1})}{\lambda_{cu}} + \frac{Ln(\frac{d_2+2x_1}{d_2})}{\lambda_1} + \frac{Ln(\frac{d_2+2(x_1+x_2)}{d_2+2x_1})}{\lambda_2}\right] \quad \textbf{(1')}$$

et le diamètre extérieur s'écrit :

$$d_{ext} = d_2 + 2(x_1 + x_2) \qquad \textbf{(2')}$$

Si $\boldsymbol{R_{th}=R_{th/min}}$ alors $\boldsymbol{d_{ext}=d_{max}}$

Il en résulte, tenant compte de ***(1')*** et ***(2')***, que :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \text{ mm} \\ 2\pi L.R_{th/\min} - \dfrac{Ln(\frac{d_2}{d_1})}{\lambda_{cu}} = \left[\dfrac{Ln(\frac{d_2+2x_1}{d_2})}{\lambda_1} + \dfrac{Ln(\frac{d_2+2(x_1+x_2)}{d_2+2x_1})}{\lambda_2}\right] \end{cases}$$

$$A.N.: \begin{cases} x_1 = 6\ mm \\ x_1 + x_2 = 9\ mm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6\ mm \\ x_2 = 3\ mm \end{cases}$$

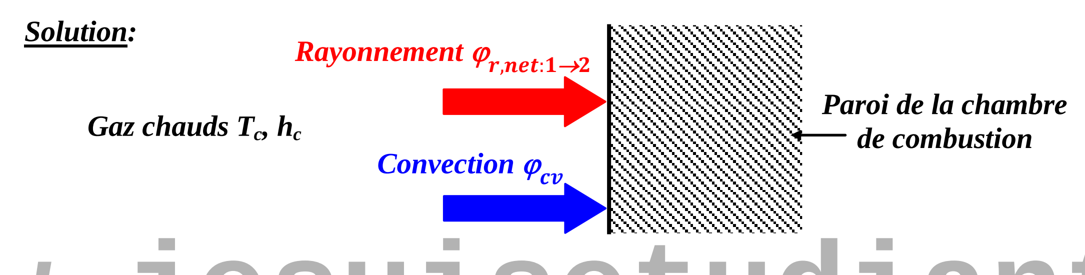
Donc, l'isolant de conductivité thermique $\boldsymbol{\lambda_1=0,1}$ ***Kcal/h.m.°C*** doit avoir une épaisseur $\boldsymbol{x_1=6}$ ***mm*** et celui de $\boldsymbol{\lambda_2=0,05}$ ***Kcal/h.m.°C*** doit avoir une épaisseur $\boldsymbol{x_2=3}$ ***mm***.

Exercice II.6:

La paroi intérieure d'une chambre de combustion reçoit ***163000 Kcal/h.m²*** par rayonnement à partir d'un gaz à ***2760°C***. Le coefficient d'échange thermique par convection entre le gaz et la paroi est ***122 Kcal/h.m².°C***. Sachant que la température de la paroi intérieure de la chambre de combustion est égale à ***538°C***.

1. Quels sont les modes de transferts thermiques en présence.
2. Calculer la résistance thermique, par unité de surface de la paroi, relative à chaque mode de transfert de chaleur. En déduire la résistance thermique totale.
3. Calculer le flux thermique échangé entre le gaz et la paroi.
4. Calculer le coefficient d'échange de chaleur par rayonnement.

Solution:



1. Les modes de transfert de chaleur en présence sont le rayonnement et la convection (fluide en contact avec une paroi solide).

La densité de flux thermique transférée par convection des gaz chauds vers la paroi interne de la chambre de combustion se calcule en appliquant la loi de ***Newton*** :

$$\varphi_{cv} = h_c \times (T_C - T_p)$$

La densité de flux thermique transférée par rayonnement des gaz chauds vers la paroi interne de la chambre de combustion se calcule en appliquant la relation suivante:

$$\varphi_{r,net:1\to 2} = \frac{\Phi_{r,net:1\to 2}}{S_1}$$

$$\varphi_{r,net:1\to 2} = F_{12} \times \sigma(T_c^4 - T_p^4)$$

En introduisant le coefficient d'échange de chaleur par rayonnement h_r, la densité de flux thermique devient:

$$\varphi_{r,net:1\to 2} = h_r \times (T_c - T_p)$$

2. Résistances thermiques, par unité de surface de la paroi, relative à la convection r_{cv} et au rayonnement r_r:

➔ Résistance thermique de convection:

$$r_{cv} = S \times R_{cv} = \frac{(T_c - T_p)}{\varphi_{cv}} \quad \Rightarrow \quad r_{cv} = \frac{1}{h_c}$$

$$r_{cv} \approx 8,197 \times 10^{-3}\ m^2.°C.h/Kcal$$

résistance caractérisant l'échange de chaleur par convection entre les gaz chauds et l'unité de surface de la paroi de la chambre de combustion.

➔ Résistance thermique de rayonnement:

$$r_r = S \times R_r = \frac{(T_c - T_p)}{\varphi_{r,net:1\to 2}}$$

$$r_r \approx 13,632 \times 10^{-3}\ m^2.°C.h/Kcal$$

➔ Résistance thermique totale:

$$r_{th} = S \times R_{th} = \frac{(T_c - T_p)}{\varphi_{total}}$$

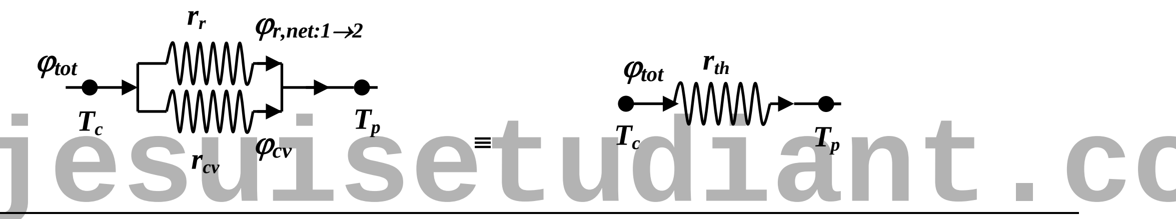
$$r_{th} = \frac{(T_c - T_p)}{\varphi_{cv} + \varphi_{r,net:1\to 2}} = \frac{(T_c - T_p)}{\frac{(T_c - T_p)}{r_{cv}} + \frac{(T_c - T_p)}{r_r}}$$

$$r_{th} = \frac{1}{\frac{1}{r_{cv}} + \frac{1}{r_r}} = \frac{r_{cv} \times r_r}{r_{cv} + r_r} = r_{cv}//r_r$$

$$\textbf{A.N.: } r_{th} = 5,12 \times 10^{-3}\ m^2.h/Kcal$$

r_{th} est donc la résistance thermique équivalente aux résistances r_{cv} et r_r montées en parallèle.

Ces échanges de chaleur par rayonnement et par convection entre les gaz chauds et la paroi peuvent être représentés par schéma électrique équivalent suivant:



3. Flux total échangé entre les gaz chauds et la paroi:

$$\varphi_{tot} = \frac{T_c - T_p}{r_{th}} \approx 434 \times 10^3 \ Kcal/h.m^2$$

Le coefficient d'échange radiatif h_r se calcule comme suit:

$$\varphi_{r,net:1\to 2} = h_r \times (T_c - T_p) \ \Rightarrow h_r = \frac{\varphi_{r,net:1\to 2}}{(T_c - T_p)} \approx 73{,}36 \ \ Kcal/h.m^2.°C$$

Remarquons que le flux total φ_{tot} peut être écrit comme suit:

$$\varphi_{tot} = \varphi_{cv} + \varphi_{r,net:1\to 2} = (h_c + h_r) \times (T_c - T_p) = h \times (T_c - T_p)$$

h est le coefficient global d'échange thermique entre les gaz et la paroi :

$$h = \approx 195{,}36 \ Kcal/h.m^2.°C$$

D'après le cours (***chapitre 3 : conduction***, page ***5***), h_r peut être calculé, si l'on connaît tous les paramètres dont il dépend, en utilisant la formule:

$$h_r = 4\mathcal{F}_{12}\,\sigma \times \left(\frac{T_c + T_p}{2}\right)^3 \quad \text{si} \ \left(\left|T_c - T_p\right| \le 100°C\right)$$

$$h_r = \frac{\mathcal{F}_{12} \times \sigma\left(T_c^4 - T_p^4\right)}{\left(T_c - T_p\right)} = \mathcal{F}_{12} \times \sigma\left(T_C^2 + T_p^2\right) \times \left(T_c + T_p\right) \quad \text{si} \ \left(\left|T_c - T_p\right| > 100°C\right)$$

Dans cet exercice, on a: $T_c - T_p = 2222°C$

Donc :

$$h_r = \mathcal{F}_{12} \times \sigma\left(T_C^2 + T_p^2\right) \times \left(T_c + T_p\right)$$

On peut en tirer la valeur du facteur de forme gris :

$$\mathcal{F}_{12} \approx 0{,}04$$

<u>Exercice II.7</u>:

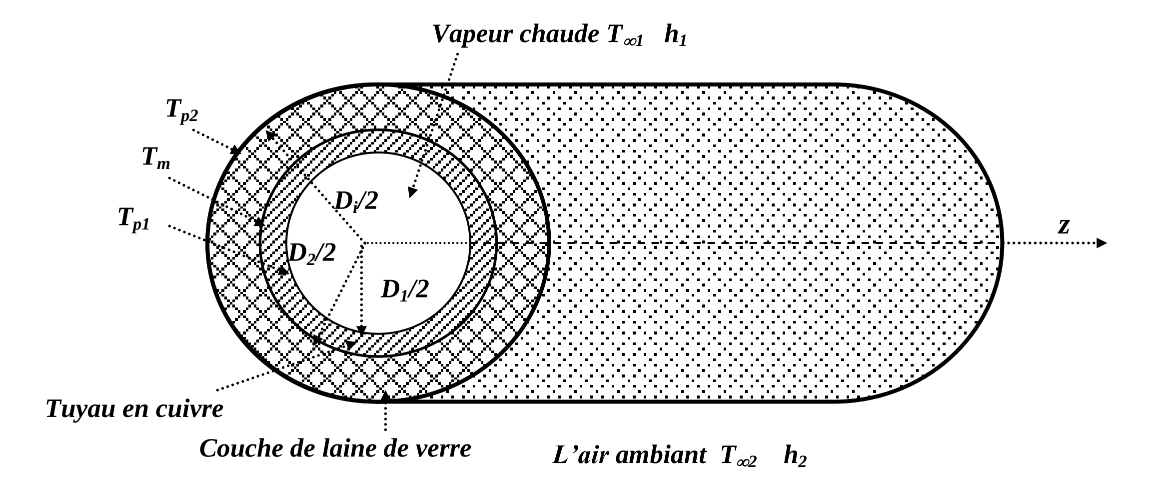
De la vapeur d'eau saturée à T_V***=138°C*** (P_S***=3,4 atm.***) s'écoule dans un tuyau en cuivre ***(λ=386 W/m.°C)*** de diamètres interne D_1***=19 mm*** et externe D_2***=25 mm*** placé dans une pièce à ***27°C***. Le coefficient d'échange thermique à l'intérieur du tuyau est h_1***=28,34 W/m²·°C***. Le coefficient d'émission de la surface extérieure du tuyau est ***ε=0,9*** et le coefficient d'échange convectif sur cette surface est h_2***=14,17 W/m²·°C.***

1. En négligeant le rayonnement, calculer le flux thermique perdu par mètre de longueur du tuyau nu. En déduire les valeurs des températures sur les surfaces intérieure et extérieure du tuyau.
2. En tenant compte du rayonnement:
   - ***a)*** Calculer la température sur la surface externe du tuyau. On effectuera un bilan thermique sur cette surface.
   - ***b)*** En déduire le flux thermique perdu par mètre de longueur du tuyau nu.
   - ***c)*** Donner, en pourcentage, la contribution du rayonnement et celle de la convection à l'échange thermique entre la surface externe du tuyau et l'air ambiant.
3. Le tuyau est revêtu d'une couche isolante de laine de verre ***(***λ_i***=0,046 W/m.°C)*** d'épaisseur ***e***.
   - ***a)*** L'isolant employé permettra-t-il de réduire les pertes thermiques à travers la paroi du tuyau.

b) Calculer les pertes de chaleur si ***e=12,5 mm***. On supposera les mêmes valeurs du coefficient d'émission ε et du coefficient d'échange convectif h_2 dans les questions précédentes. En déduire les valeurs des températures T_{p1} et T_m.

c) Donner, en pourcentage, la contribution du rayonnement et celle de la convection à l'échange thermique entre la surface externe du tuyau et l'air ambiant.

4. Si le prix de l'isolant est ***675 DH*** par mètre et le prix du chauffage de la vapeur est ***150 DH*** par ***418000 KJ***, estimer le temps à partir duquel le prix de l'isolation est compensé par l'économie réalisée sur le chauffage.



Solution:

→ ***Cas du tuyau nu***:

Tuyau en cuivre: ($D_1, D_2, L, T_{p1}, T_{p1}, \varepsilon, \lambda$)

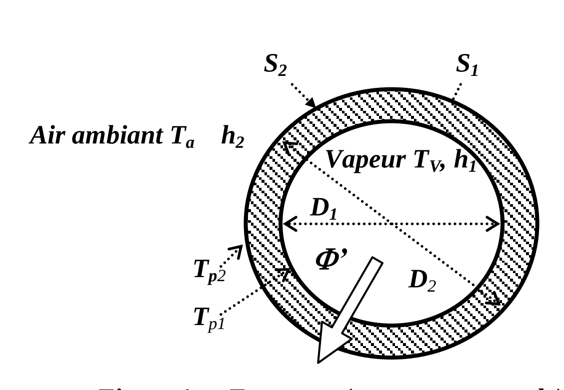


Figure 1.a: Tuyau nu (coupe transversale).

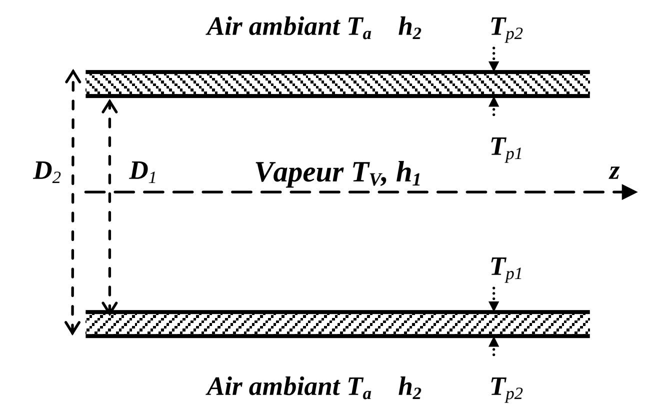


Figure 1.b Tuyau nu (coupe longitudinale).

1. Cas où l'on néglige l'échange de chaleur par rayonnement entre la surface externe du tuyau et l'air ambiant.

La chaleur se propage radialement de l'intérieur vers l'extérieur. Le flux thermique est donc donné par:

$$\Phi = \frac{T_V - T_a}{R_1 + R_{cd} + R_{cv2}}$$

avec:

$$\begin{cases} R_1 = R_{cv1} \,//\, R_{r1} = \dfrac{1}{\pi.D_1.L.h_1} & \text{(résistance thermique de convection et rayonnement sur la surface } S_1,\ h_1 = h_{c1} + h_{r1}) \\ R_{cd} = \dfrac{Ln\left(\dfrac{D_2}{D_1}\right)}{2.\pi.\lambda.L} & \text{(résistance thermique de conduction du tuyau nu)} \\ R_{cv2} = \dfrac{1}{\pi.D_2.L.h_2} & \text{(résistance thermique de convection sur la surface } S_2, \text{ celle du rayonnement est négligée } h_2 = h_{c2} + h_{r2} \approx h_{c2}) \end{cases}$$

Le flux thermique perdu par mètre de longueur du tuyau nu est:

$$\Phi' = \frac{\Phi}{L} = \frac{T_V - T_a}{R'_1 + R'_{cd} + R'_{cv2}}$$

R' est une résistance thermique par unité de longueur du tuyau: $R' = L \times R$.

♦ *Circuit thermique*:

T_V —Φ'→ R'_1 — T_{p1} → R'_{cd} — T_{p2} → R'_{cv2} — T_a

- $R'_1 = \dfrac{1}{\pi.D_1.h_1} = 591,15 \times 10^{-3}\, m.°C/W$

résistance thermique de convection et de rayonnement au niveau de la surface frontière interne du tuyau nu.

- $R'_{cd} = \dfrac{Ln\left(\dfrac{D_2}{D_1}\right)}{2.\pi.\lambda} = 0,113 \times 10^{-3}\, m.°C/W$

résistance thermique de conduction du tuyau nu.

- $R'_{cv2} = \dfrac{1}{\pi.D_2.h_2} = 898,55 \times 10^{-3}\, m.°C/W$

résistance thermique de convection (le rayonnement est négligé) au niveau de la surface frontière externe du tuyau nu.

Par conséquent, le flux thermique perdu par mètre de longueur du tuyau nu est:

$$\Phi' = 74,5 W / m$$

Les températures sur les surfaces intérieure et extérieure du tuyau se calculent en utilisant le circuit thermique.
On a:

$$\begin{cases} \Phi' = \dfrac{T_V - T_{p1}}{R'_1} \\ \Phi' = \dfrac{T_{p2} - T_a}{R'_{cv2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{p1} = T_V - R'_1 \times \Phi' = 93{,}96°C \\ T_{p2} = T_a + R'_{cv2} \times \Phi' = 93{,}94°C \end{cases}$$

On obtient $T_{p1} \approx T_{p2}$, ce qui est normal puisque la paroi du tuyau est de très faible épaisseur et construite en cuivre (métal très conducteur de chaleur).

2. Cas où l'on tient compte de l'échange thermique par rayonnement entre la surface frontière externe S_2 du tuyau et l'air ambiant.

a) Calcul de la température sur la surface externe du tuyau nu T_{p2}.

Dans ce cas, le circuit thermique est schématisé par:

D'après ce circuit, on a:

$$\Phi' = \Phi'_{r,net2} + \Phi'_{cv2}$$

Ou encore, en effectuant un bilan énergétique sur la surface externe du tuyau:

$$Gains - Pertes + Génération\ (ou\ dégradation) = Accumulation$$

Génération (ou dégradation) de l'énergie=0, car il n'y a pas de sources ni de puits de chaleur sur la surface externe du tuyau.

Accumulation de l'énergie=0, car les échanges d'énergie s'effectuent en régime permanent.

L'équation du bilan énergétique s'écrit donc:

$$Gains - Pertes = 0$$

Les gains de la surface S_2 sont le flux de chaleur ***Φ'*** reçu par cette surface en provenance de la vapeur chaude (ce flux traverse par conduction la paroi du tuyau):

$$\Phi' = \frac{T_V - T_{p2}}{R'_1 + R'_{cd}} \quad \text{(d'après le circuit thermique)}$$

Les pertes de la surface S_2 sont les flux de chaleur Φ'_{cv2} et $\Phi'_{r,net2}$ échangés par cette surface avec l'air ambiant respectivement par convection et par rayonnement.

$$\begin{cases} \Phi'_{cv2} = \dfrac{T_{P2} - T_a}{R'_{cv2}} \\ \Phi'_{r,net2} = \dfrac{T_{P2} - T_a}{R'_{r2}} \end{cases} \quad \text{(d'après le circuit thermique)}$$

L'équation du bilan énergétique devient:

$$\Phi' = \Phi'_{cv2} + \Phi'_{r,net2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_V - T_{p2}}{R'_1 + R'_{cd}} = \left(T_{p2} - T_a\right) \times \left(\frac{1}{R'_{cv2}} + \frac{1}{R'_{r2}}\right) \quad (*)$$

Le flux radiatif net transféré de la surface S_2 (S_2, T_{p2}, ε_2) vers l'air ambiant (S_a, T_a, ε_a) est donné par la relation suivante:

$$\Phi'_{r,net2} = \Phi'_{r,net,2\to a} = \frac{S_2 \mathcal{F}_{2a} \sigma\left(T_{p2}^4 - T_a^4\right)}{L} \approx \frac{S_2 h_{r2}}{L}\left(T_{p2} - T_a\right) = \frac{T_{p2} - T_a}{R'_{r2}}$$

$/T_{p2}$-$T_a/ \leq 100°C$, donc: $h_{r2} = 4\mathcal{F}_{2a}\,\sigma \times \left(\frac{T_{p2} + T_a}{2}\right)^3$

$\mathcal{F}_{2a}$ étant le facteur de forme gris:

$$\mathcal{F}_{2a} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 + \frac{1}{F_{2a}} + \frac{S_2}{S_a}\left(\frac{1}{\varepsilon_a} - 1\right)}$$

Les couches d'air avoisinant la paroi externe du tuyau peuvent être assimilées à une paroi cylindrique de diamètre interne $D_3 = D_2 + \beta$ (β<< $D2$ et L) et de coefficient d'émission $\varepsilon_a = 1$.
Dans ces conditions, la surface S_2 du tuyau et l'air environnant se comportent comme deux cylindres coaxiaux infiniment longs échangeant du rayonnement entre eux. Par conséquent :

$F_{2a} = 1$ et $\mathcal{F}_{2a} = \varepsilon_2 = \varepsilon$

L'équation **(*)** du bilan énergétique devient:

$$\frac{T_V - T_{p2}}{R'_1 + R'_{cd}} = \frac{T_{p2} - T_a}{R'_{cv2}} + \pi D_2 \varepsilon\sigma\left(T_{p2}^4 - T_a^4\right)$$

$$\Rightarrow \quad -\left[\frac{\pi D_2 \varepsilon\sigma}{\frac{1}{R'_1 + R'_{cd}} + \frac{1}{R'_{cv2}}}\right] \times T_{p2}^4 + \frac{1}{\frac{1}{R'_1 + R'_{cd}} + \frac{1}{R'_{cv2}}} \times \left[\pi D_2 \varepsilon\sigma T_a^4 + \frac{T_a}{R'_{cv2}} + \frac{T_V}{R'_1 + R'_{cd}}\right] = T_{p2}$$

(**)

On pose:

$$\begin{cases} A = -\dfrac{\pi D_2 \varepsilon\sigma}{\frac{1}{R'_1 + R'_{cd}} + \frac{1}{R'_{cv2}}} \\ B = \dfrac{1}{\frac{1}{R'_1 + R'_{cd}} + \frac{1}{R'_{cv2}}} \times \left[\pi D_2 \varepsilon\sigma T_a^4 + \frac{T_a}{R'_{cv2}} + \frac{T_V}{R'_1 + R'_{cd}}\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1{,}429 \times 10^{-9}\ K^{-3} \\ B = 378{,}5\ K \end{cases}$$

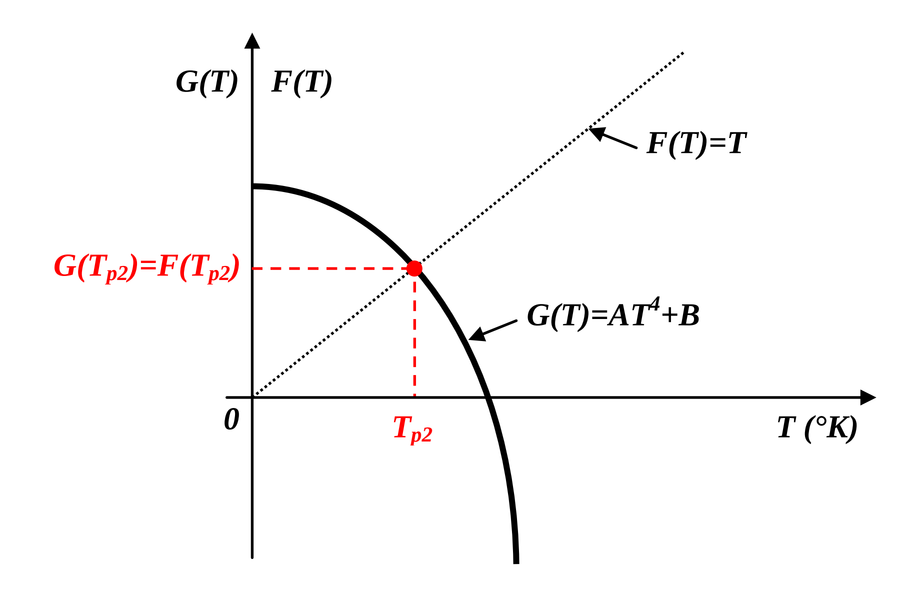
La relation devient:

$$A \times T_{p2}^4 + B = T_{p2}$$

La résolution graphique de cette équation (voir figure ci-après) donne la solution suivante:

$$T_{p2} = 82{,}66°C$$

Cette solution peut également être obtenue en utilisant une méthode numérique.



Il s'ensuit que la résistance de rayonnement R'_{r2} vaut :

$$\Phi'_{r,net2} = \Phi'_{r,net,2\to a} = \frac{S_2 \mathcal{F}_{2a}\, \sigma\left(T_{p2}^4 - T_a^4\right)}{L} \approx \frac{S_2 h_{r2}}{L}\left(T_{p2} - T_a\right) = \frac{T_{p2} - T_a}{R'_{r2}}$$

$$R'_{r2} = L \times \frac{1}{h_{r2} S_2} = \frac{1}{\pi D_2 \times 4\mathcal{F}_{2a}\, \sigma \times \left(\frac{T_{p2} + T_a}{2}\right)^3}$$

$$R'_{r2} = \frac{1}{4\pi D_2 \varepsilon\sigma \times \left(\frac{T_{p2} + T_a}{2}\right)^3} \approx 1770{,}43 \times 10^{-3}\ m.°C/W$$

$$h_{r2} = 7{,}19\ W/m^2.°C$$

Le coefficient global d'échange thermique (rayonnement+convection) sur S_2 est : $h_2 = h_{r2} + h_{c2} = 21{,}37 W/m^2.°C$

b) Le flux thermique perdu par unité de longueur du tuyau est:

$$\Phi' = \frac{T_V - T_{p2}}{R'_1 + R'_{cd}} \approx 93{,}6\ W/m$$

c) Contributions du rayonnement et de la convection à l'échange de chaleur entre la surface externe S_2 du tuyau et l'air ambiant:

D'après le circuit, on a:

$$\Phi' = \Phi'_{cv2} + \Phi'_{r,net2}$$

- Le flux perdu par convection est:

$$\Phi'_{cv2} = \frac{T_{p2} - T_a}{R'_{cv2}} \approx 61{,}94 W/m$$

- Le flux perdu par rayonnement est:

$$\Phi'_{r,net2} = \frac{T_{p2} - T_a}{R'_{r2}} \approx 31{,}66 W/m$$

La contribution de la convection à l'échange thermique est: $\frac{\Phi'_{cv2}}{\Phi'}\% \approx 66{,}2\%$

Celle du rayonnement est: $\frac{\Phi'_{r,net2}}{\Phi'}\% \approx 33{,}8\%$

Il en découle que la contribution du rayonnement ne peut pas être négligée devant celle de la convection. L'hypothèse qu'on a faite dans la question ***1)*** est donc incorrecte.

Remarque:

Si le tuyau était construit en ***cuivre poli (ε=0,04)*** on obtiendrait*:*

➔ $A \times T_{p2}^4 + B = T_{p2}$, *avec:* $\begin{cases} A = -6{,}352 \times 10^{-11} K^{-3} \\ B = 367{,}46 K \end{cases}$

dont la solution serait: $T_{p2} \approx 93{,}32°C$

➔ Flux radiatif net échangé par la surface externe du tuyau nu*:*

$$\Phi'_{r,net2} = 1{,}76 W/m$$

avec: $h_{r2} = 0{,}34 W/m^2.°C$

➔ Flux convectif échangé par la surface externe du tuyau nu:

$$\Phi'_{cv2} = 73{,}8 W/m$$

Dans ce cas, $\Phi'_{r,net2}$ représente seulement ***2%*** du flux total échangé et Φ'_{cv2} représente ***98%***. Donc, *le rayonnement peut être négligé devant la convection dans le cas où la surface externe du tuyau est faiblement émissive (ε très faible).*

3. Le tuyau est revêtu d'une couche isolante de laine de verre de conductivité thermique λ_i et d'épaisseur ***e***.

a) Pour réaliser une bonne isolation thermique efficace il faudrait choisir un isolant de conductivité thermique λ_i telle que:

$$\lambda_i \le h_2 . \frac{D_2}{2} = \lambda_0$$

$\lambda_0 = h_2 . \frac{D_2}{2} \approx 0{,}267 W/m.°C$ (***h_2=21,37 W/m².°C***, cas où le rayonnement est non négligeable devant la convection).

$\lambda_0 = h_2 . \frac{D_2}{2} \approx 0{,}177 W/m.°C$ (***h_2= h_{c2}=14,17 W/m².°C***, cas où le rayonnement est négligeable devant la convection).

L'isolant choisi est la laine de verre de conductivité ***λ_i=0,046 W/m.°C*** inférieure à λ_0. Donc, il permettra de réduire les pertes thermiques à travers la paroi du tuyau.

b) Calcul du flux perdu par unité de longueur du tube isolé.

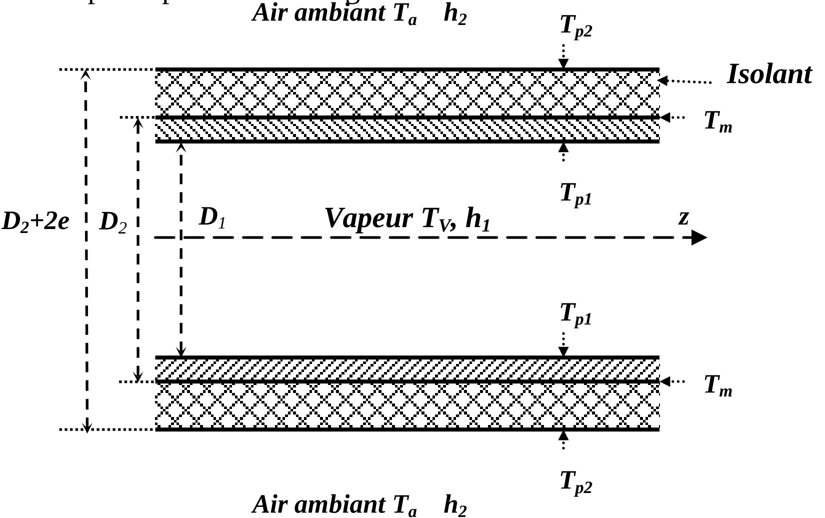


***Figure 3**: Tuyau isolé (coupe longitudinale).*

Le circuit thermique correspondant est:

Φ' ; T_V — R'_1 — T_{p1} — R'_{cd} — Φ' ; T_m — R'_{cdi} — Φ' ; T_{p2} — [R'_{r2}, $\Phi'_{r,net2}$ // R'_{cv2}, Φ'_{cv2}] — Φ' ; T_a

Avec:

$$R'_{cdi} = \frac{Ln\left(1+\frac{2.e}{D_2}\right)}{2.\pi.\lambda_i} = 2398{,}2\times10^{-3}\, m.°C\,/\,W$$: résistance thermique de conduction de la couche isolante.

Calculons tout d'abord la valeur de T_{P2}:

Au point du circuit de température $\mathbf{T_{p2}}$, on peut écrire:

$$\Phi' = \Phi'_{cv2} + \Phi'_{r,net2} \;\Rightarrow\; \frac{T_V - T_{p2}}{R'_1 + R'_{cd} + R'_{cdi}} = \frac{T_{p2} - T_a}{R'_{cv2}} + \pi\left(D_2 + 2e\right)\mathcal{F}_{2a}\,\sigma\left(T_{p2}^4 - T_a^4\right)$$

$$\Rightarrow\; \frac{T_V - T_{p2}}{R'_1 + R'_{cd} + R'_{cdi}} = \frac{T_{p2} - T_a}{R'_{cv2}} + \pi\left(D_2 + 2e\right)\varepsilon\sigma\left(T_{p2}^4 - T_a^4\right)$$

Tous calculs faits, on obtient:

$$AT_{p2}^4 + B = T_{p2}$$

Avec :

$$\begin{cases} A = -\dfrac{\pi\left(D_2 + 2e\right)\varepsilon\sigma}{\dfrac{1}{R'_1 + R'_{cd} + R'_{cdi}} + \dfrac{1}{R'_{cv2}}} \\[2ex] B = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R'_1 + R'_{cd} + R'_{cdi}} + \dfrac{1}{R'_{cv2}}} \times \left[\pi\left(D_2 + 2e\right)\varepsilon\sigma T_a^4 + \dfrac{T_a}{R'_{cv2}} + \dfrac{T_V}{R'_1 + R'_{cd} + R'_{cdi}}\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -3{,}1307 \times 10^{-9}\ K^{-3} \\ B = 339{,}86\ K \end{cases}$$

Le flux traversant la paroi du tuyau isolé est (d'après le circuit):

$$\Phi' = \frac{T_V - T_{p2}}{R'_1 + R'_{cd} + R'_{cdi}} \approx 33{,}55\ W/m$$

L'ajout de la couche isolante permet donc de réaliser une réduction de ***64,15%*** du flux thermique traversant la paroi du tuyau.

➔ Températures T_{p1} et T_m :

D'après le circuit, on a:

$$\begin{cases} T_{p1} = T_V - R'_1\,\Phi' \approx 118{,}17°C \\ T_m = T_{p2} + R'_{cdi}\,\Phi' \approx 118{,}16°C \end{cases} \Rightarrow T_{p1} \approx T_m$$

c) Contributions du rayonnement et de la convection à l'échange de chaleur entre la surface externe S'_2 du tuyau isolé et l'air ambiant:

- Le flux perdu par convection est:

$$\Phi'_{cv2} = \frac{T_{p2} - T_a}{R'_{cv2}} \approx 23{,}75 W/m$$

- Le flux perdu par rayonnement est:

$$\Phi'_{r,net2} = \frac{T_{p2} - T_a}{R'_{r2}} \approx 9{,}77 W/m$$

Donc, ***29%*** d'échange thermique s'effectue par rayonnement et ***71%*** par convection.

$$h_{r2} = 4\mathcal{F}_{2a}\,\sigma\left(\frac{T_{p2} + T_a}{2}\right)^3 = 4\varepsilon\sigma\left(\frac{T_{p2} + T_a}{2}\right)^3 \approx 5{,}81 W/m^2.°C$$

4. Si le prix du chauffage de la vapeur est de ***41800 KJ***, alors les économies réalisées sur une période de temps Δt sont telles que:

$q \rightarrow p$ ***(q=418000 KJ/m)***
$Q \rightarrow P_{ch}$ ***(p=150 DH)***

Donc :

$$P_{ch} = Q \times \frac{p}{q} = \frac{|\Phi'_{iso} - \Phi'_{n.iso}|}{q} \times p \times \Delta t$$

Sachant que le prix moyen de l'isolation pour un mètre de longueur du tuyau est P_{iso}***=675 DH***, le temps au bout duquel ce prix d'isolation est compensé par l'économie réalisée sur le chauffage est tel que:

$$P_{ch} = P_{iso} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{P_{iso}}{|\Phi'_{iso} - \Phi'_{n.iso}| \times p} \times q$$

A. N.: $\Delta t \approx 12759{,}5$ heures≈1 an, 5 mois, 16 jours et 15 heurs.

On conclut qu'au bout d'un an et demi le prix d'isolation du tuyau peut être compensé par les économies réalisées sur le chauffage.

Exercice II.8:

Un réservoir cylindrique d'oxygène liquide a ***1,2 m*** de diamètre (externe) et ***6 m*** de long, avec des extrémités hémisphériques. La température d'ébullition de l'oxygène liquide est ***-183°C***. On cherche un isolant dont l'épaisseur n'excède pas ***30 cm*** et qui peut, en régime permanent, réduire le débit d'évaporation à une valeur inférieure à ***22 Kg/h***. La chaleur d'évaporation de l'oxygène liquide est ***51 Kcal/Kg***. La température de l'air ambiant est $T_a=20°C$ et le coefficient d'échange thermique est ***h=9,7 Kcal/h.m²°C.*** On suppose que l'oxygène est en équilibre thermique avec la paroi du réservoir.

1. Déterminer le flux thermique maximum pouvant être échangé à travers la paroi du réservoir.
2. Déterminer les différentes résistances thermiques rencontrées par le flux. Tracer le circuit thermique.
3. En déduire la valeur de la conductivité thermique de l'isolant.
4. Quel serait le débit d'évaporation de l'oxygène liquide si le réservoir avait une double paroi en aluminium poli ($\varepsilon=0,03$). L'espace annulaire compris entre les deux couches d'aluminium étant vide. On suppose un équilibre thermique d'une part entre l'oxygène liquide et la paroi interne du réservoir, et d'autre part entre l'air ambiant et la paroi externe du réservoir.

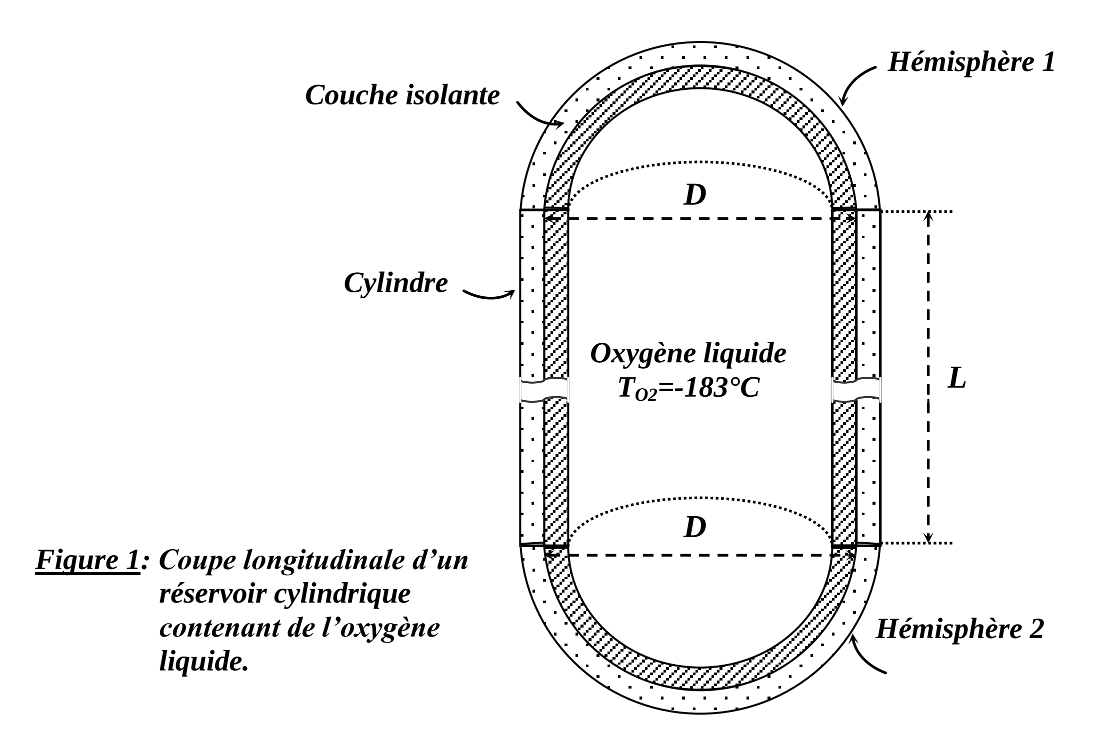


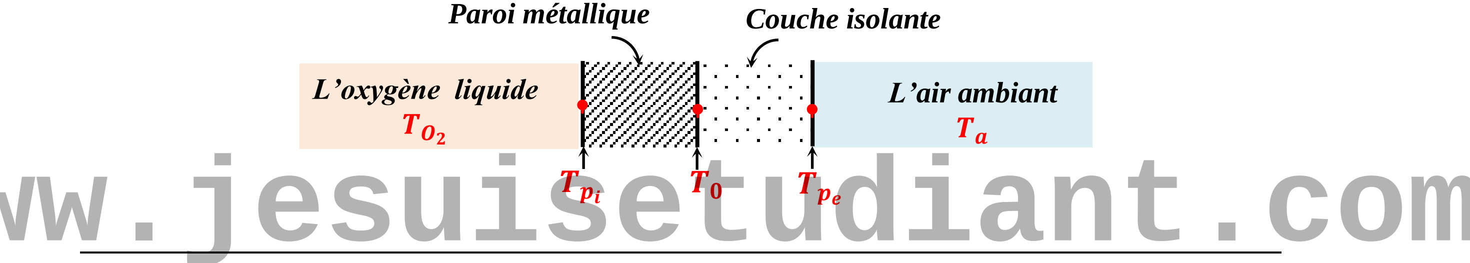
Figure 1: Coupe longitudinale d'un réservoir cylindrique contenant de l'oxygène liquide.

Solution:

- Le réservoir est composé d'un cylindre creux, de diamètre externe ***D=1,2 m*** et de longueur ***L=6 m***, et deux hémisphères de même diamètre externe ***D*** (qui, assemblées, forment une sphère de même diamètre ***D***).
- L'oxygène liquide est en équilibre thermique avec la paroi métallique du réservoir, donc :

$$T_0 \approx T_{p_i} \approx T_{O_2} = -183°C$$

Avec T_{p_i} la température sur la surface interne de la surface interne de la paroi métallique du réservoir et T_0 la température sur sa surface externe en contact avec la couche isolante (voir figure ci-après).



1. L'oxygène liquide, se trouvant dans les conditions de changement de phase, utilise pour se vaporiser la chaleur qu'il reçoit de l'extérieur à travers la paroi composite du réservoir :

$$\boldsymbol{\Phi = \dot{m} \times L_V}$$

où $\dot{m}$ est le débit massique d'évaporation de O_2 et L_V sa chaleur latente de vaporisation.
Comme on cherche à réduire le débit d'évaporation $\dot{m}$ à une valeur inférieure à ***22 Kg/h***, Φ représente le flux thermique maximum pouvant être reçu par l'oxygène à travers la paroi du réservoir.

$$\boldsymbol{\Phi_{max} = \dot{m} \times L_V \approx 714\ Kcal/h}$$

2. Résistances et circuit thermiques :

2-a) Résistances thermiques rencontrées par le flux

- Le flux total Φ traversant la paroi du réservoir se compose de trois flux :
- $\Phi_{Cylin.}$: flux traversant la paroi composite du cylindre,
- $\Phi_{Hémisph.1}$: flux traversant la paroi composite de l'hémisphère ***1***,
- $\Phi_{Hémisph.2}$: flux traversant la paroi composite de l'hémisphère ***2***,

$$\Phi = \Phi_{Cylin.} + \underbrace{\Phi_{Hémisph.1} + \Phi_{Hémisph.2}}_{\substack{Flux\ traversant\ la\ sphère\ creuse,\ de\ diamètre\ D, \\ obtenue\ en\ assemblant\ les\ hémisphères\ 1\ et\ 2}}$$

$$\Phi = \Phi_{Cylindre} + \Phi_{Sphère}$$

- Le flux $\Phi_{Cylin.}$ rencontre les résistances suivantes:
- Résistance thermique de convection+rayonnement (négligeable), au niveau de la surface externe du cylindre (l'interface couche isolante-air ambiant):

$$R_{cv,e/Cylin} = \frac{1}{h \times S_{e,Cylin}} = \frac{1}{h \times \pi \times (D + 2.e) \times L} \approx 3,04 \times 10^{-3}\ °C.h/Kcal$$

- Résistance thermique de conduction de la couche cylindrique isolante $(e,\ \lambda_i)$:

$$R_{cd,iso/Cylin} = \frac{Ln\left(1 + \frac{2.e}{D}\right)}{2 \times \pi \times \lambda_i \times L}$$

- Résistance thermique de conduction de la paroi métallique cylindrique (D_0, D, λ):

$$R_{cd,métal/Cylin} = \frac{Ln\left(\frac{D}{D_0}\right)}{2 \times \pi \times \lambda_{mét} \times L} \rightarrow 0 \text{ car } \lambda_{mét} \text{ est élevée}$$

Entre ***l'O_2*** liquide et la paroi interne du cylindre il y a équilibre thermique, donc:

$$R_{cv,i/Cylin} \rightarrow 0$$

- Le flux $\Phi_{Sphère}$ rencontre les résistances suivantes:
- Résistance thermique de convection+rayonnement (négligeable), au niveau de la surface externe de la sphère (l'interface couche isolante-air ambiant):

$$R_{cv,e/Sph} = \frac{1}{h \times S_{e,Sph}} = \frac{1}{h \times \pi \times (D + 2.e)^2} \approx 10,13 \times 10^{-3}\ °C.h/Kcal$$

- Résistance thermique de conduction de la couche sphérique isolante $(e,\ \lambda_i)$:

$$R_{cd,iso/Sph} = \frac{\frac{1}{D} - \frac{1}{(D + 2.e)}}{2 \times \pi \times \lambda_i}$$

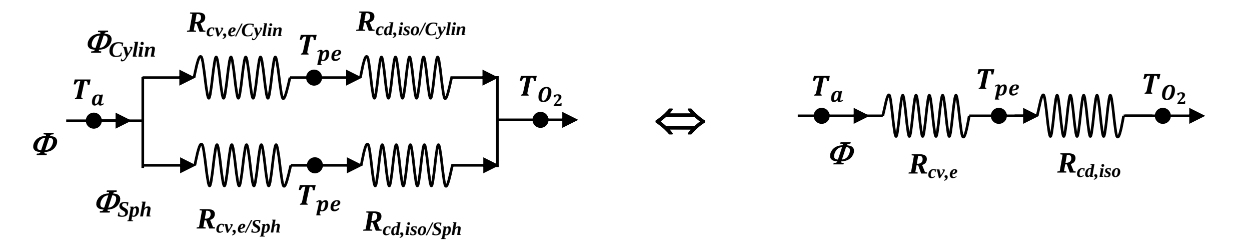
- Résistance thermique de conduction de la paroi métallique sphérique (D_0, D, λ):

$$R_{cd,m\acute{e}tal/Sph} = \frac{\frac{1}{D_0} - \frac{1}{D}}{2 \times \pi \times \lambda_{m\acute{e}t}} \quad \rightarrow 0 \text{ car } \lambda_{m\acute{e}t} \text{ est élevée}$$

Entre ***l'O₂*** liquide et la paroi interne de la sphère il y a équilibre thermique, donc:

$$R_{cv,i/sph} \rightarrow 0$$

2-b) Circuit thermique :



avec:

- $R_{cv,e}$: Résistante thermique de convection au niveau de la surface externe totale du réservoir:

$$R_{cv,e} = R_{cv,e/Cylin} \,//\, R_{cv,e/Sph}$$

Tous calculs faits, on obtient:

$$R_{cv,e} = \frac{1}{h \times S_{e,total}} = \frac{1}{h \times \pi \times (D + 2.e) \times (L + D + 2.e)} \approx 2,34 \times 10^{-3} \ {}^\circ C.h/Kcal$$

- $R_{cd,iso}$: Résistante thermique de conduction de la couche isolante totale du réservoir:

$$R_{cd,iso} = R_{cd,iso/Cylin} \,//\, R_{cd,iso/Sph}$$

Tous calculs faits, on obtient:

$$R_{cd,iso} = \frac{1}{2 \times \pi \times \lambda_i \times \left[\frac{L}{Ln\left(1 + \frac{2.e}{D}\right)} + \frac{D \times (D + 2.e)}{2.e}\right]}$$

3. Valeur de la conductivité thermique de l'isolant :
D'après le circuit thermique, on a:

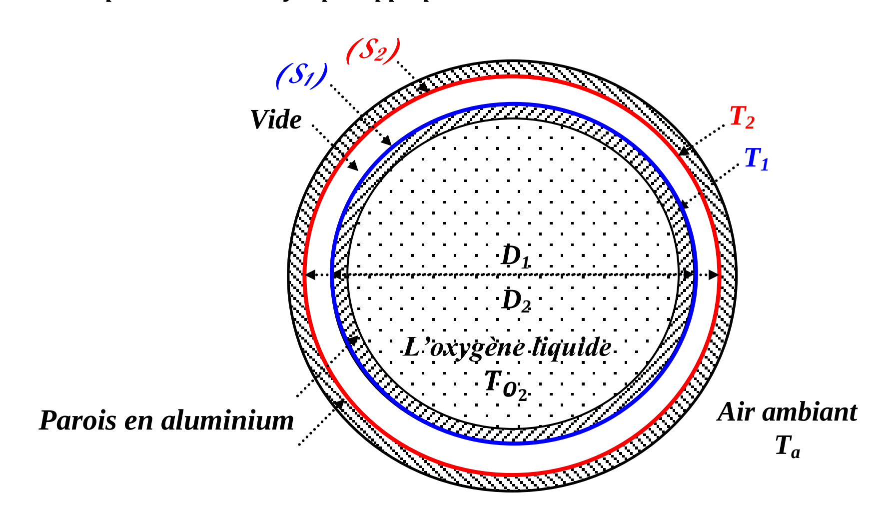
$$\Phi = \frac{T_a - T_{O_2}}{R_{cv,e} + R_{cd,iso}} \quad \Rightarrow \quad R_{cd,iso} = \frac{T_a - T_{O_2}}{\Phi} - R_{cv,e}$$

Après développement et simplification des calculs, on obtient:

$$\lambda_i = \frac{\Phi}{2 \times \pi \times \left[\frac{L}{Ln\left(1 + \frac{2.e}{D}\right)} + \frac{D \times (D + 2.e)}{2.e}\right] \times \left[T_a - T_{O_2} - \Phi \times R_{cv,e}\right]}$$

A.N.: $\lambda_i \approx 0,031 \ Kcal/h.{}^\circ C \ \approx 0,035 \ W/m.{}^\circ C$

4. Si le réservoir avait une double paroi en aluminium poli (***ε=0,03***) avec un espace annulaire vide, on aurait un transfert de chaleur par rayonnement entre les deux couches métalliques (à travers l'espace vide)



- Surface (en ***Al***) rayonnante grise (S_1): (S_1; T_1; ε_1) ;
- Surface (en ***Al***) rayonnante grise (S_2): (S_2; T_2; ε_2).

Le flux de chaleur reçu par l'O2 est celui échangé par rayonnement entre (S_1) et (S_2) :

$$\Phi = -\Phi_{r,net:1\to 2} = -\left(\Phi_{r,net,Cylin:1\to 2} + \Phi_{r,net,Sph:1\to 2}\right) = S_1 \times \mathcal{F}_{12} \times \sigma \times \left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

$$\Phi_{r,net,Cylin:1\to 2} = S_1 \times \mathcal{F}_{12} \times \sigma \times \left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

$T_1 = T_{O_2}$ et $T_2 = T_a$

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}} + \frac{S_1}{S_2} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{D_1}{D_2} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} \qquad (F_{12}=1)$$

$$\mathcal{F}_{12} = 0,016$$

Par suite:

$$\Phi_{r,net,Cylin:1\to 2} = \pi \times D_1 \times L \times \mathcal{F}_{12} \times \sigma \times \left(T_{O_2}^4 - T_a^4\right)$$

$$\Phi' \approx -129 \ Kcal/h$$

Et

$$\Phi_{r,net,Sph:1\to 2} = S_1 \times \mathcal{F}_{12} \times \sigma \times \left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

$T_1 = T_{O_2}$ et $T_2 = T_a$

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}} + \frac{S_1}{S_2} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} \qquad (F_{12}=1)$$

$$\mathcal{F}_{12} = 0,0164$$

Par suite:

$$\Phi_{r,net,Cylin:1\to 2} = \pi \times D_1^2 \times \mathcal{F}_{12} \times \sigma \times \left(T_{O_2}^4 - T_a^4\right)$$

$$\Phi' \approx -26,5 \ Kcal/h$$

D'où :

$$\Phi = -\Phi_{r,net:1\to 2} \approx 155,5 \ Kcal/h$$

Il s'en suit que le débit d'évaporation serait :

$$\dot{m} = \frac{\Phi}{L_V} \approx 3,05 \ Kg/h$$

Avec cette technique d'isolation, on réduit le débit d'évaporation de ***86%***.

***Exercice II.9**: (Extrait de TD de GP-IGM2_ 2012/2013 et du contrôle de EGP-PCM_2009/2010)*

Un réservoir sphérique, utilisé dans l'industrie chimique, a un diamètre intérieur de ***1,5 m*** et sa paroi se compose de trois couches (***figure 1.a***):

- une couche intérieure en acier (λ_a*=42 W/m.°C*) d'une épaisseur de ***2 mm***,
- une couche intermédiaire isolante (λ_i*=0,128 W/m.°C*) d'une épaisseur de ***10 mm***,
- une couche extérieure également en acier (λ_a*=42 W/m.°C*) d'une épaisseur de ***3 mm***.

Les coefficients de transfert thermique à l'intérieur et à l'extérieur du réservoir sphérique sont $h_i=400$ $W/m^2.°C$ et $h_e=30$ $W/m^2.°C$. La température du fluide chaud stocké dans le réservoir est $T_i=200°C$ et la température de l'air ambiant est $T_a=20°C$.

1. Quels sont les modes de transfert de chaleur mis en jeu?
2. Calculer les résistances thermiques de conduction, $R_{cd,a,1}$ $R_{cd,i}$ et $R_{cd,a,2}$, et de convection (rayonnement) R_i et R_e.
3. Tracer le circuit thermique, en déduire le flux de chaleur Φ et les températures sur les différentes surfaces de séparation (T_{pi}, T_1, T_2 et T_{pe}).
4. Le flux Φ traversant la paroi de ce réservoir constitue des pertes thermiques qui doivent être compensées en chauffant le fluide afin de le maintenir à la température constante $T_i=200°C$. Pour réduire les dépenses énergétiques, on stocke ce fluide dans un réservoir isolé efficacement (***figure 1.b***) composé de deux sphères concentriques (S_1) de diamètre externe $D_1=1,5$ ***m*** et (S_2) de diamètre interne $D_2=1,6$ ***m.*** L'espace annulaire compris entre ces sphères est vide et leurs surfaces en regard sont en aluminium poli ($\varepsilon=0,03$). On suppose un équilibre thermique d'une part entre la sphère (S_1) et le fluide chaud et d'autre part entre la sphère (S_2) et l'air ambiant.

4-a) Quels sont les modes de transfert de chaleur mis en jeu?

4-b) Calculer le flux de chaleur traversant la paroi du réservoir.

4-c) Quelle réduction, en pourcentage, des pertes thermiques obtient-on en stockant le fluide dans le réservoir en aluminium.

On donne: $\sigma=5,67\times10^{-8}$ $W/m^2.K^4$, constante de ***Stefan-Boltzmann***.

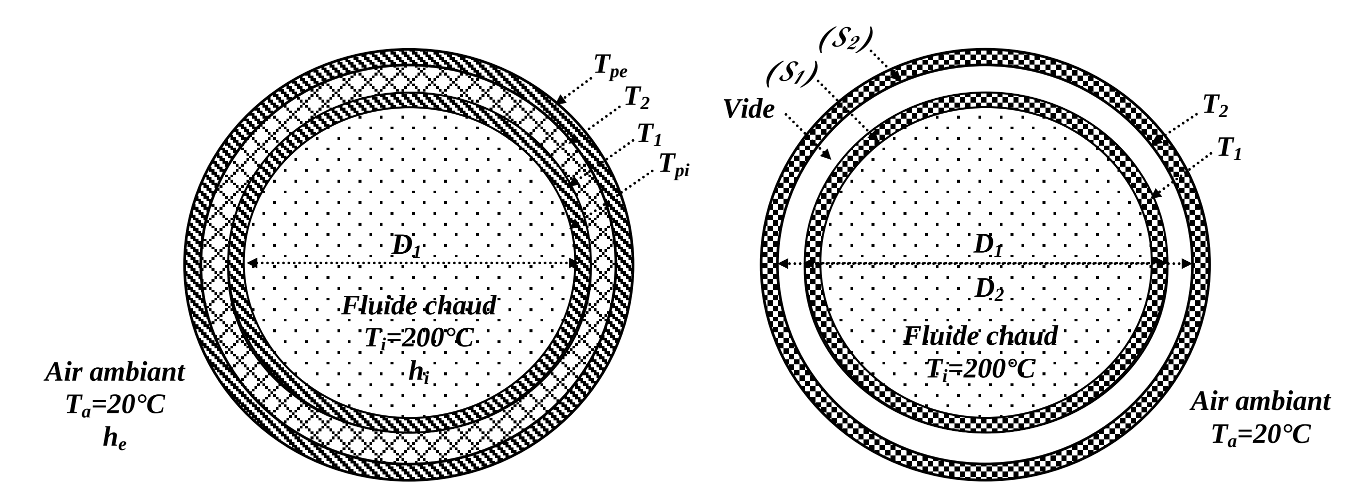


***Figure 1**: Réservoir sphérique en acier.*

***Figure 2**: Réservoir sphérique en aluminium.*

Solution:

1. Modes de transfert de chaleur mis en jeu :

- ***Convection*** (***rayonnement***) entre le fluide chaud et la surface interne du réservoir,
- ***Conduction*** à travers la paroi composite du réservoir,
- ***Convection*** (***rayonnement***) entre la surface externe du réservoir et l'air ambiant.

2. Résistances thermiques de conduction, $R_{cd,a,1}$, $R_{cd,i}$ et $R_{cd,a,2}$, et de convection (rayonnement) R_i et R_e.

$$R_{cd,a,1} = \frac{\frac{1}{D} - \frac{1}{D+2.e_1}}{2.\pi.\lambda_a} \approx 6,7 \times 10^{-6}\ °C/W$$

$$R_{cd,i} = \frac{\frac{1}{D+2.e_1} - \frac{1}{D+2.(e_1+x)}}{2.\pi.\lambda_i} \approx 10849,4 \times 10^{-6}\ °C/W$$

$$R_{cd,a,2} = \frac{\frac{1}{D+2.(e_1+x)} - \frac{1}{D+2.(e_1+x+e_2)}}{2.\pi.\lambda_a} \approx 9,7 \times 10^{-6}\ °C/W$$

$$R_i = \frac{1}{h_1.S_1} = \frac{1}{h_1.\pi.D_1^2} \approx 353,7 \times 10^{-6}\ °C/W$$

$$R_e = \frac{1}{h_2.S_2} = \frac{1}{h_2.\pi.D_2^2} \approx 4533 \times 10^{-6}\ °C/W$$

3. Circuit thermique :

Φ → T_i — R_i — T_{pi} — $R_{cd,a,1}$ — T_1 — $R_{cd,i}$ — T_2 — $R_{cd,a,2}$ — T_{pe} — R_e — T_a → Φ

D'après le circuit, on a :

$$\Phi = \frac{T_i - T_a}{R_i + R_{cd,a,1} + R_{cd,i} + R_{cd,a,2} + R_e} \approx 11427\ W$$

Et on a aussi :

$$\begin{cases} \Phi = \dfrac{T_i - T_{pi}}{R_i} \\ \Phi = \dfrac{T_{pe} - T_a}{R_i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{pi} = T_i - R_i \times \Phi \approx 195,96°C \\ T_{pe} = T_a + R_e \times \Phi \approx 71,8°C \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} \Phi = \dfrac{T_{pi} - T_1}{R_{cd,a,1}} \\ \Phi = \dfrac{T_1 - T_2}{R_{cd,i}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = T_{pi} - R_{cd,a,1} \times \Phi \approx 195,88°C \\ T_2 = T_1 - R_{cd,i} \times \Phi \approx 71,9°C \end{cases}$$

4. Réservoir en aluminium.

4-a) Le seul mode de transfert thermique existant est ***le rayonnement***.

4-b) Flux de chaleur traversant la paroi du réservoir

$$\Phi_{r,net:1\to2} = S_1 \times \mathcal{F}_{12} \times \sigma \times \left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

$T_1 = T_i = 200°C$, car (S_1) est en équilibre thermique avec le fluide chaud.
$T_2 = T_a = 20°C$, car (S_2) est en équilibre thermique avec l'air.

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}} + \frac{S_1}{S_2}\times\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{D_1}{D_2}\times\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} \qquad (F_{12} = 1)$$

$$\mathcal{F}_{12} = 0,0162$$

Par suite:

$$\Phi' = \Phi_{r,net:1\to2} = S_1 \times \mathcal{F}_{12} \times \sigma \times \left(T_i^4 - T_a^4\right)$$

$$\textbf{A.N.:} \quad \Phi' \approx 277\ W$$

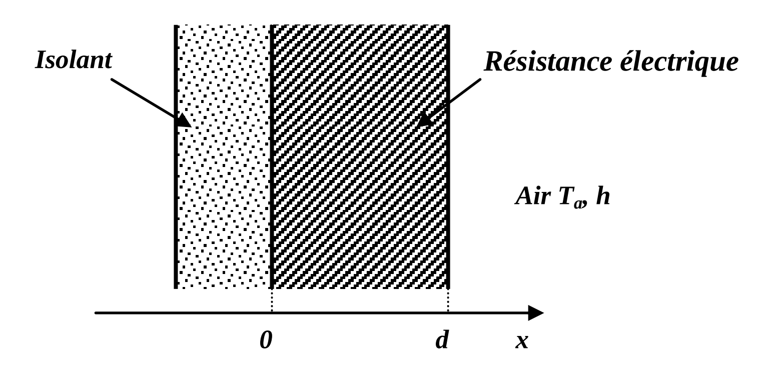
Soit une réduction de ***97,6%*** du flux traversant la paroi du réservoir.

II.2. Sources internes de chaleur

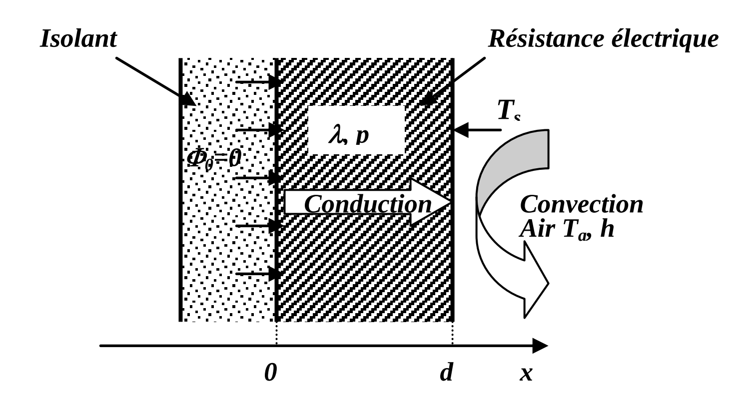
***Exercice II.10*:**

Une résistance électrique (épaisseur d, largeur l et hauteur L) est parfaitement isolée sur une de ses faces. Sur l'autre face, il y a un échange thermique par convection (avec un coefficient h) avec l'air environnant à la température T_∞. En régime permanent, on suppose que la conductivité λ de la résistance est constante et que la génération de chaleur par effet joule est uniforme p *(W/m³)*.

1. Déterminer l'expression du profil de température dans la résistance électrique (on négligera les effets de bouts).
2. Déterminer l'expression du flux thermique traversant la résistance.
3. Sans utiliser l'expression du profil obtenue en ***1-***, trouver la température T_S sur la surface en contact avec l'air.
4. A quelle profondeur dans la plaque observe-t-on la température maximale?
5. Application numérique: ***d=20mm***, ***l=60mm***, ***L=300mm***, ***h=12W/m.K***, λ***=333kcal/h.m.°C***, T_∞***=20°C*** et ***p=0,2 W/cm³***.
6. Tracer sur la figure ci-après la forme du profil de température dans la plaque.



Solution:



1. Au sein de la résistance électrique, les échanges thermiques sont régis par l'équation de la conduction thermique qui s'écrit dans le cas d'une propagation unidirectionnelle (par exemple, suivant ***OX***):

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{p}{\lambda}=0 \qquad \textbf{(1)}$$

Les conditions aux limites associées à ce problème sont:

$$\begin{cases} -\lambda S\left.\dfrac{dT}{dx}\right]_{x=0}=\Phi_0=0 & \text{sur l'interface isolant/résistance (C.L. de Newmann)} \\ -\lambda S\left.\dfrac{dT}{dx}\right]_{x=d}=hS(T_S-T_\infty) & \text{sur l'interface résistance/air ambiant (C.L. de Fourier)} \end{cases} \qquad (2)$$

L'intégration de l'équation (1) donne:

$$T(x)=-\frac{p}{2\lambda}x^2+C_1x+C_2 \qquad (3)$$

C_1 et ***C_2*** sont déterminées à l'aide des conditions aux limites (2):

$$\begin{cases} C_1=0 \\ C_2=\dfrac{pd}{h}+\dfrac{p}{2\lambda}d^2+T_\infty \end{cases}$$

La distribution de température (3) devient:

$$T(x)=-\frac{p}{2\lambda}x^2+pd\left(\frac{1}{h}+\frac{d}{2\lambda}\right)+T_\infty \qquad (0\le x\le d) \qquad (4)$$

2. Flux thermique traversant la résistance:

On a:

$$\Phi=-\lambda S\frac{dT}{dx}$$

D'où:

$$\Phi(x)=pLl.x \qquad 0\le x\le d$$

3. Température ***T_S*** sur la face de la résistance en contact avec l'air:

- *Méthode (1)*:

D'après (4), on a:

$$T_S=T(x=d)$$

$$T_S=\frac{pd}{h}+T_\infty$$

- *Méthode (2)* :

La puissance thermique produite **P** à l'intérieur de la résistance est intégralement évacuée vers l'extérieur à travers la paroi de température ***T_S*** :

$$P=hS(T_S-T_\infty)$$

$$\Rightarrow \quad p.V=hS(T_S-T_\infty)$$

$$\Rightarrow \quad p.(Sd)=hS(T_S-T_\infty)$$

$$\Rightarrow \quad T_S=T_\infty+\frac{pd}{h}$$

4. Position du maximum de température:

T admet un maximum en x_m si et seulement si $\left.\frac{dT}{dx}\right]_{x=x_m} = 0$ et $\left.\frac{d^2T}{dx^2}\right]_{x=x_m} < 0$

$$\begin{cases} \left.\frac{dT}{dx}\right]_{x=x_m} = -\frac{p}{\lambda}x_m = 0 \\ \left.\frac{d^2T}{dx^2}\right]_{x=x_m} = -\frac{p}{\lambda} < 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_m = 0$$

Le maximum de température $T_{\max} = T_\infty + pd(\frac{1}{h} + \frac{d}{2\lambda})$ est localisé sur la face de la résistance en contact avec l'isolant.

5. ***Application numérique***:
- Distribution de température:

$$T(x) = -258,6x^2 + 353,4 \quad (°C) \qquad (0 \le x \le 0,02 \ \ m)$$

- Flux thermique:

$$\Phi(x) = 3600x \qquad (0 \le x \le 0,02 \ \ m)$$

- Puissance thermique totale produite dans la résistance:

$$P = 72 \ W$$

- Température T_S :

$$T_S \ ; \ 353,3 \ °C$$

- Température maximale T_{max} :

$$T_{\max} \ ; \ 353,4 \ °C$$

T_S et ***T_{max}*** sont très voisines.

***Exercice II.11*:**

On considère une sphère de diamètre ***d=10 cm***. Sa conductivité thermique est ***λ=520 kcal/(h.m.°C)***. Pour chauffer cette sphère, on utilise une source de chaleur délivrant une puissance p par unité de volume (***p*** est supposée constante). La surface de la sphère est en contact avec l'air à la température de ***T_∞=20°C***. Le coefficient d'échange convectif air-sphère est ***h=15W/(m^2.°C)***. On suppose que le régime permanent est atteint.

1. Exprimer la température ***T_S*** de la surface de la sphère en fonction de ***p***.
2. Déterminer, en résolvant l'équation de la chaleur, l'expression de la distribution de température dans la sphère en fonction de ***p***.
3. Montrer que cette distribution de température admet un maximum ***T_{max}*** dont on précisera la position dans la sphère.
4. Calculer la puissance ***p'*** en ***Watt*** que l'on doit utiliser pour que ce maximum soit égal à ***100°C***.
5. Calculer la température de la paroi de la sphère ***T_S***.

Solution:

Schéma descriptif:

h
λ
Air h
d
h Air
P=p.V

1. En régime établi, on n'a pas d'accumulation d'énergie:
L'énergie thermique fournie par la source est égale à l'énergie évacuée vers l'air par convection naturelle.

$$P=p.V=\Phi_{évacuée}$$

$$p.4\pi r^3/3=hS(T_S-T_\infty)$$
$$p.\pi d^3/6=h.\pi d^2(T_S-T_\infty)$$

On en déduit la température de la surface de la sphère T_S:

$$T_S=dp/6h+T_\infty$$

2. La distribution de température dans la sphère s'obtient en résolvant l'équation de la chaleur qui s'écrit, dans ce cas, avec les conditions aux limites associées:

$$\Delta T+\frac{p}{\lambda}=0 \text{ avec } \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=0}=0 \text{ et } T\left(r=\frac{d}{2}\right)=T_S$$

L'intégration de cette équation donne:

$$T(r)=-(p/6\lambda)r^2-C_1/r+C_2$$

avec: $C_1=0$ et $C_2=T_S+pd^2/24\lambda$

La distribution de température à l'intérieur de la sphère s'écrit :

$$T(r)=(p/6\lambda)(d^2/4-r^2)+T_S \qquad \text{avec } 0\leq r\leq d/2$$

Ou encore:

$$T(r)=(p/6\lambda)(d^2/4-r^2)+dp/6h+T_\infty \qquad \text{avec } 0\leq r\leq d/2$$

3. Maximum de température:

T(r) admet un maximum noté T_{max} si et seulement si $\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=r_m}=0$ et $\left.\frac{\partial^2 T}{\partial^2 r}\right]_{r=r_m}<0$.

On a:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=r_m}=0 \Rightarrow -\frac{p}{3\lambda}r_m=0 \Rightarrow r_m=0$$

$$\text{et} \quad \left.\frac{\partial^2 T}{\partial^2 r}\right]_{r=r_m}=-\frac{p}{3\lambda}<0$$

Donc, $r_m=0$ est un maximum de ***T(r)***.

Le maximum de température T_{max} est localisé au centre de la sphère.

$$T_{max}=T(r_m)=T(0)$$

$$T_{max}=T_S+\frac{p.d^2}{24.\lambda}$$

$$T_{max}=T_\infty+\frac{p.d}{6.\lambda}\times\left(\frac{d}{4}+\frac{\lambda}{h}\right)$$

4. La puissance ***P'*** que l'on doit utiliser pour que le maximum T_{max} soit égal à ***100°C*** est telle que:

$$P' = p.V$$

Cherchons d'abord ***p*** pour $T_{max}=100°C$.

$$T_{max} - T_{\infty} = \frac{d.p}{6.\lambda} \times \left(\frac{d}{4} + \frac{\lambda}{h}\right)$$

$$p = 6 \times \frac{(T_{max} - T_{\infty})}{d \times \left(\frac{1}{h} + \frac{d}{4.\lambda}\right)}$$

A.N.: $p \approx 71955\ W/m^3$

et $P' \approx 37,67\ W$

5. Température de la surface de la sphère, T_S:

On a:

$$T_S = \frac{d.p}{6.h} + T_{\infty}$$

A.N. $T_S \approx 99,95\ °C$

$T_S \approx T_{max}$, la sphère semble avoir une distribution uniforme de température:

$$T(M) = Ts\ \ \forall M \in Sphère.$$

Exercice II.12:

Une résistance électrique de très grande longueur ***L*** et de diamètre ***d=2,6 mm***, est constituée d'un fil dont la conductivité est $\lambda=20\ W/(m.°C)$ et dont la résistance électrique linéaire est $\rho=0,25\ \Omega/m$. Cette résistance est parcourue par un courant électrique d'intensité ***I***.

1. Déterminer l'expression de la puissance ***p*** dissipée dans le fil par unité de volume.

2. On suppose que la résistance est plongée dans un bain d'huile en circulation qui maintient sa température de surface à T_S.

2-a) Ecrire l'équation différentielle permettant de calculer la température ***T(r)*** dans le fil.

2-b) Montrer que la solution est de la forme:

$$T(r) = T_{max} - (T_{max} - T_S)\left(\frac{2.r}{d}\right)^2$$

où T_{max} est la température maximale dont on déterminera l'expression et la position dans le fil.

2-c) Calculer T_{max} pour ***I=300 A***.

3. On suppose maintenant que la résistance est placée dans l'air à la température $T_{\infty}=20°C$. Le coefficient de transfert par convection entre le fil et l'air est $h=10\ W/(m^2.°C)$.

3-a) En faisant un bilan énergétique, déterminer l'expression de la température de surface du fil T_S.

3-b) En déduire l'expression de T_{max}.

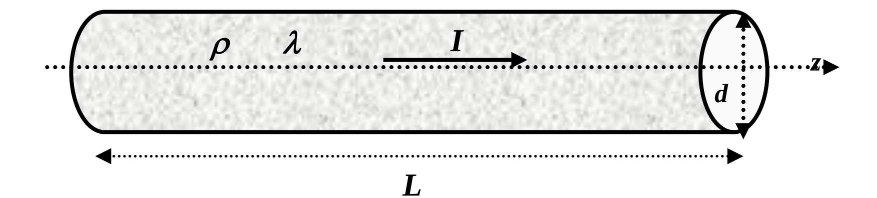
3-c) Si on désigne par T_C la température maximale que peut supporter la résistance, déterminer l'intensité maximale du courant I_{max} que l'on peut utiliser.

3-d) On donne $T_C=1000°C$, calculer I_{max}.

Solution

Schéma descriptif





1. La puissance thermique dissipée, par effet Joule, dans la résistance est :

$$P=U.I=R.I^2=(\rho.L)I^2$$

On en déduit la puissance dissipée par unité de volume:

$$p= P/V=(\rho.L)I^2/(\pi Ld^2/4)$$
$$\Rightarrow \; p=4\rho I^2/\pi d^2$$

2. a. On se place dans le cas d'un transfert thermique permanent unidimensionnel (radial), l'équation de la chaleur s'écrit donc:

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{p}{\lambda} = 0 \qquad (1)$$

Les conditions aux limites associées à ce problème sont:

$$T(r=d/2)=T_S \quad \text{et} \quad T(r=0) \text{ finie} \quad \text{ou} \quad \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=0} = 0 \qquad (2)$$

L'intégration de l'équation (1) donne:

$$T(r)=-(p/4\lambda)r^2+C_1Ln(r)+C_2 \qquad \text{pour } 0\le r\le d/2$$

Les constantes C_1 et C_2 sont déterminées à l'aide des conditions aux limites (2):

$$C_1=0 \quad \text{et} \quad C_2=T_S+p.d^2/(16.\lambda)$$

La distribution de température à l'intérieur du mur s'écrit finalement:

$$T(x) = \frac{p}{2.\lambda}.x.(2.e - x) + \frac{p.e}{h} + T_\infty \qquad \text{pour } 0 \le x \le e$$

$$T(r)=-(p/(4.\lambda))(r^2-d^2/4)+T_S \qquad \text{pour } 0\le r\le d/2 \qquad (3)$$

2-b- $T(r)$ admet un maximum T_{max} au point r_m si et seulement si:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=r_m} = 0 \text{ et } \left.\frac{\partial^2 T}{\partial^2 r}\right]_{r=r_m} < 0 .$$

On a:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=r_m} = 0 \Rightarrow -\frac{p}{2.\lambda}r_m = 0 \Rightarrow r_m=0$$

$$\text{et} \quad \left.\frac{\partial^2 T}{\partial^2 r}\right]_{r=r_m} = -\frac{p}{2.\lambda} < 0$$

Donc, $r_m=0$ est un maximum de $T(r)$.
Le maximum de température T_{max} est localisé sur l'axe du fil repéré par $r=0$:

$$T_{max}=T(r_m)=T(0)$$

$$T_{max}=p.d^2/(16.\lambda)+T_S$$

La distribution de température ***(3)*** s'écrit également:

$$T(r)=T_{max}-4.(T_{max}-T_S).r^2/d^2 \quad \text{pour} \quad 0\leq r\leq d/2$$

2-c- Calcul de $T_{max}-T_S$:

On a:

$$T_{max}-T_S=p.d^2/(16.\lambda)$$

Remplaçons ***p*** par son expression (voir question ***1***), on obtient:

$$T_{max}-T_S=\rho.I^2/(4.\pi.\lambda)$$

A.N.: $T_{max}-T_S\approx 89,5\ °C$ (l'écart de température entre l'axe et la surface du fil)

Comme $T_S=50°C$, donc $T_{max}=89,5\ °C$.

3. On suppose maintenant que la résistance est placée dans l'air à la température $T_\infty=20°C$. Le coefficient de transfert thermique par convection entre le fil et l'air est $h=10\ W/m^2.°C$.

3-a- L'expression de la température de surface du fil T_S s'obtient en écrivant que la condition aux limites sur la surface devient:

$$-\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=d/2}=h(T_S-T_\infty) \text{ et on a tjs } \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=0}=0 \qquad (4)$$

$\underbrace{-\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=d/2}}_{Conduction}=\underbrace{h(T_S-T_\infty)}_{Convection}$: cette condition aux limites exprime que la chaleur produite dans le fil, par ***effet Joule***, est transférée par conduction de l'intérieur vers la surface du fil, et ensuite par convection de la surface vers l'air environnant.

$$-\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=d/2}=h(T_S-T_\infty)$$

$$\Rightarrow\ -\lambda\left(-\frac{p.d}{4.\lambda}\right)=h.(T_S-T_\infty)$$

$$\Rightarrow\ T_S=\frac{p.d}{4.h}+T_\infty$$

3-b- On en déduit l'expression de T_{max} :

D'après la quest. ***2-b***, on a:

$$T_{max}=p.d^2/(16.\lambda)+T_S$$

$$T_{max}=p.(d/8).(d/2\lambda+2/h)+T_\infty$$

3-c- On désigne par T_C la température maximale que peut supporter la résistance électrique, cherchons l'intensité maximale du courant notée I_{max} que l'on peut utiliser.

La température maximale atteinte dans le fil (résistance) est donnée par:

$$T_{max}=(p.d/8)(d/(2.\lambda)+2/h)+T_\infty$$

avec: $p=4.\rho.I^2/(\pi.d^2)$

Donc:

$$T_{max} =(\rho.I^2/(4.\pi))(1/\lambda+1/(h.d))+T_\infty$$

Cette température doit être maintenue en dessous de T_C, c.à.d.:

$$T_{max}\leq T_C \;\Rightarrow\; (\rho I^2/(4.\pi))(1/\lambda+1/(h.d)) \leq T_C - T_\infty$$

$$\Rightarrow\; I^2\leq 4.\pi.(T_C - T_\infty)/(\rho\,(1/\lambda+1/(h.d)))$$

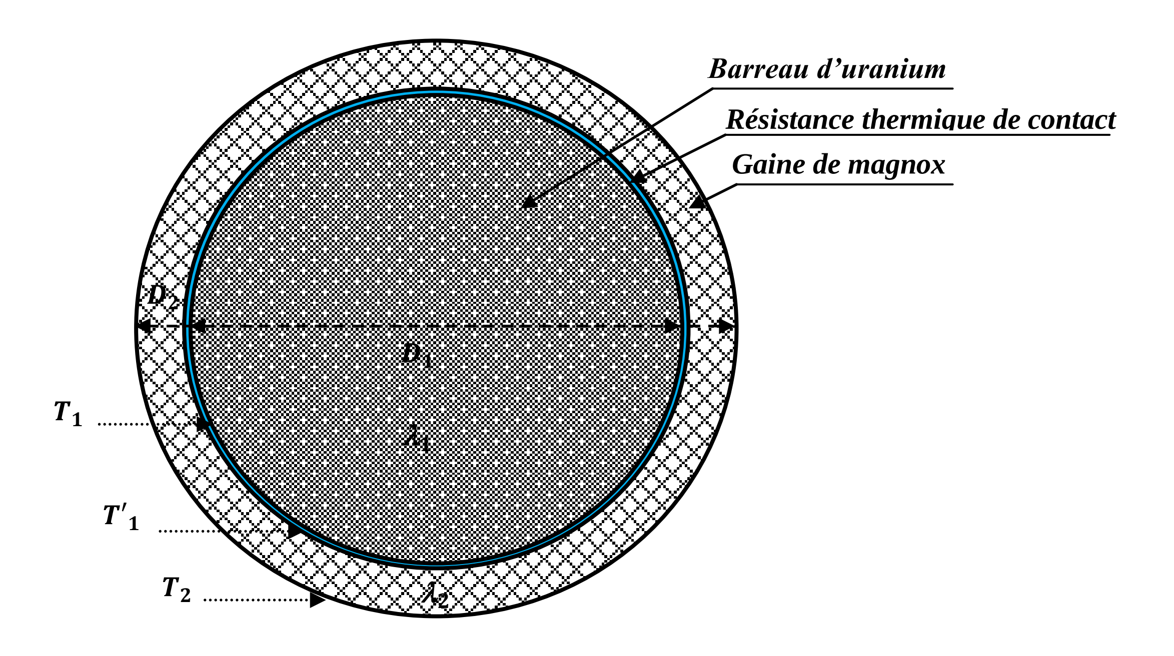
$$\Rightarrow\; I \leq \sqrt{\frac{4.\pi}{\rho}\frac{.(T_C - T_\infty)}{(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{h.d})}} = I_{max}$$

3-d- Application numérique: on donne $T_C=1000°C$.

$$I_{max}\approx 18\ A$$

***Exercice II.13**: (Extrait de TD de GP-IGM2_ 2012/2013)*

Soit un barreau d'uranium (de $29,3\ mm$ de diamètre) chemisé dans une gaine unie de magnox (alliage de magnésium) de $33\ mm$ de diamètre extérieur. La chaleur produite au cœur du combustible pendant le processus de fission nucléaire doit atteindre par conduction la surface du barreau avant d'être transmise au réfrigérant. Le flux de chaleur libéré par le combustible, par unité de longueur de barreau, est de $43,152\ KW/m$. On suppose que la génération de chaleur est uniforme dans le combustible. Les conductivités thermiques moyennes de l'uranium et du magnox, dans les conditions de fonctionnement, sont respectivement $32,5$ et $141,5\ W/m.°C$. La mise en œuvre technique du barreau de combustible ne permet pas de réaliser une continuité thermique parfaite entre la cartouche active et la gaine. On tiendra donc compte de la résistance thermique entre combustible et gaine estimée, par unité de longueur de barreau, à $8,2\times 10^{-4}°C.m/W$.



1. Déterminer la distribution de température dans le combustible.

2. En déduire que :

$$T_0 - T_1 = \frac{\Phi}{4.\pi.\lambda_1.L}$$

où: T_0 est la température au centre du barreau,
T_1 est la température à la périphérie du barreau,
Φ est le flux de chaleur dégagée dans le barreau,
λ_1 est la conductivité du matériau constituant le barreau,
L est la longueur du barreau.

3. Déterminer les températures au centre et à la périphérie du combustible en supposant que la surface extérieure de la gaine est maintenue à $440°C$ par la circulation du réfrigérant.

Solution:

- Barreau d'uranium métal: cylindre plein (D_1, λ_1, L).
- Gaine de magnox: cylindre creux (D_1, D_2, λ_2, L).
- Contact thermique imparfait entre le barreau d'uranium et la gaine de magnox caractérisé par une résistance thermique de contact, par unité de longueur, $R'_{th,cont}$.

1. Le barreau d'uranium correspond à un milieu conductif avec sources interne de chaleur. L'équation de la conduction s'y écrit en régime permanent:

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda_1} = 0 \quad (1)$$

Les conditions aux limites associées à ***(1)*** sont :

$$(2) \begin{cases} \left[\dfrac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=0} = 0 & \text{(pas d'échappement de chaleur au centre du barreau)} \\ T\left(r = \dfrac{D_1}{2}\right) = T_1 \end{cases}$$

Comme il s'agit d'un transfert thermique radial, donc:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{p}{\lambda_1} = 0$$

L'intégration de cette équation donne:

$$T(r) = -\frac{p}{4\lambda_1}r^2 + C_1 Lnr + C_2 \quad (\text{pour } 0 \le r \le R_1)$$

Les constantes d'intégration sont déterminées à l'aide des conditions aux limites ***(2)***:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = T_1 + \dfrac{pD_1^2}{16\lambda_1} \end{cases}$$

Il s'ensuit que la distribution de température T(r) à l'intérieur du barreau d'uranium est donnée par:

$$T(r) = \frac{p}{4\lambda_1}\left(\frac{D_1^2}{4} - r^2\right) + T_1 \qquad \left(\text{pour } 0 \le r \le \frac{D_1}{2}\right) \quad (3)$$

2. Soit Φ la puissance thermique produite dans le barreau, donc:

$$\Phi = pV = p\pi R_1^2 L = \frac{p\pi D_1^2 L}{4}$$

Soit Φ' le flux thermique libéré par le combustible par unité de longueur du barreau, donc:

$$\Phi' = \frac{\Phi}{L} = \frac{p\pi D_1^2}{4}$$

Soit T_0 la température au centre du barreau, donc:

$$T_0 = T(r=0) = \frac{pD_1^2}{16\lambda_1} + T_1$$

$$\Rightarrow \; T_0 - T_1 = \frac{\Phi}{4\pi\lambda_1 L} \quad (4)$$

3. Calculons les températures T_0 et T_1 respectivement au centre et à la périphérie du combustible en supposant que la température de la surface extérieure de la gaine T_2 est égale à ***440°C***.

Le flux thermique libéré par le combustible par unité de longueur du barreau ***Φ'*** traverse d'abord la résistance thermique de contact (par unité de longueur) $R'_{th,cont}$ et ensuite la résistance thermique de la gaine du magnox $R_{th,mag}$. Donc :

$$\Phi' = \frac{T_1 - T_2}{R'_{th,cont} + R'_{th,mag}} \quad (5)$$

$$\text{avec : } \quad R'_{th,mag} = \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\pi\lambda_2}$$

Il s'ensuit que:

$$T_1 = T_2 + \Phi'\left(R'_{th,cont} + \frac{Ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\pi\lambda_2}\right)$$

Tenant compte de la relation ***(4)***, on aura:

$$T_0 = T_1 + \frac{\Phi'}{4\pi\lambda_1}$$

$$A.N.: \begin{array}{l} T_1 \approx 481°C \\ T_2 \approx 586{,}8°C \end{array}$$

Partie III: Convection Thermique

Exercice III.1:

1. Du benzène à la température de ***70°C*** circule dans un tube cylindrique en cuivre (d_1***=10 mm***, d_2***=12 mm***, ***L=15 m*** et λ_{Cu}***=398 W/m.°C***) avec une vitesse de ***4,5 m/s***.

a- Calculer les nombres de ***Prandtl***, ***Pr*** et ***Reynolds***, ***Re***; quelle est la nature de l'écoulement?
b- Calculer le nombre de ***Nusselt***, ***Nu***, et le coefficient d'échange thermique par convection, h_1.

2. Le benzène est refroidi par un courant d'eau, de température égale à ***15°C***, s'écoulant avec une vitesse de ***2 m/s***, dans l'espace annulaire compris entre le tube de cuivre et un tube coaxial de diamètre intérieur d_3***=15 mm***.

a- Calculer les nombres de ***Prandtl***, ***Pr*** et ***Reynolds***, ***Re***; quelle est la nature de l'écoulement?
b- Calculer le nombre de ***Nusselt***, ***Nu***, et le coefficient d'échange thermique par convection, h_2.

3. Calculer les résistances thermiques de:
- conduction du tube de cuivre,
- convection du côté de benzène,
- convection du côté de l'eau.

En déduire le flux thermique Φ transféré du benzène à l'eau.
On donne:
- pour le benzène à $T=70°C$: $\lambda=0,165\ W/m.°C$; $\mu=38,7\times10^{-5}\ Kg/m.s$; $\rho=856\ Kg/m^3$; $C_p=1923\ J/Kg.°C$;
- pour l'eau à $T=15°C$: $\lambda=0,586\ W/m.°C$; $\mu=1,13\times10^{-3}\ Kg/m.s$; $\rho=997\ Kg/m^3$; $C_p=4176\ J/Kg.°C$.

Solution :

1. Cas du benzène circulant dans la conduite (d_2, d_2, λ_{Cu}, ***L***).

1-a) Calcul des nombres de ***Prandtl Pr*** et de ***Reynolds Re :***

$$\begin{cases} Pr = \dfrac{\mu C_p}{\lambda} \\ Re = \dfrac{\rho V D_h}{\mu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Pr = \dfrac{\mu C_p}{\lambda} \approx 4,51 \\ Re = \dfrac{\rho V d_1}{\mu} \approx 99535 \end{cases}$$

Re>3000, l'écoulement est turbulent.

1-b) Calcul du nombre de ***Nusselt Nu*** et du coefficient convectif h_1:

On a:

$$\frac{L}{D_h} = \frac{L}{d_1} = 1500 > 60 \quad \text{et} \quad Re \approx 9,9\times10^4 \in \left[10^4 ; 12\times10^4\right]$$

Donc on peut appliquer la corrélation de ***Colburn*** : $Nu = 0,023.Re^{0,8}.Pr^{0,33}$

$$\begin{cases} Nu = 0,023.Re^{0,8}.Pr^{0,33} \\ h = \dfrac{\lambda.Nu}{D_h} \end{cases}$$

$$A.N : \begin{cases} Nu \approx 376,7 \\ h_1 \approx 6215,5 \quad W/m^2.°C \end{cases}$$

2. Cas de l'eau circulant dans l'espace annulaire compris entre les deux tubes.

1-a) Calcul des nombres de ***Prandtl Pr*** et de ***Reynolds Re :***

$$\begin{cases} Pr = \dfrac{\mu . C_p}{\lambda} \\ Re = \dfrac{\rho . V . D_h}{\mu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Pr = \dfrac{\mu . C_p}{\lambda} \approx 8{,}05 \\ Re = \dfrac{\rho . V . (d_3 - d_2)}{\mu} \approx 5293{,}8 \end{cases}$$

Re>3000, l'écoulement est turbulent.

1-b) Calcul du nombre de ***Nusselt Nu*** et du coefficient convectif h_2:
Tous calculs faits, on obtient:

$$\begin{cases} Nu \approx 43{,}62 \\ h_1 \approx 8520{,}44 \ W / m^2 . °C \end{cases}$$

3. Résistances thermiques:

$$R_{CV1} = \frac{1}{\pi . d_1 . L . h_1} = 3{,}41 \times 10^{-4} °C / W$$

$$R_{CV2} = \frac{1}{\pi . d_2 . L . h_2} = 2{,}075 \times 10^{-4} °C / W$$

$$R_{Cd} = \frac{Ln\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)}{2 . \pi . \lambda_{Cu} . L} = 4{,}86 \times 10^{-6} °C / W$$

Flux thermique transféré du benzène à l'eau:

$$\Phi = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{CV1} + R_{cd} + R_{CV2}} \approx 99310 \ W$$

Exercice III.2:

A. Un tube d'acier (d_1***=20mm,*** d_2***=25mm, L=10m et*** λ_a***=20 W/m.°C***) est parcouru par l'huile à ***50°C*** avec un débit de ***0,5 litres/s***.
1. Calculer la vitesse de l'écoulement.
2. Calculer les nombres de ***Prandtl***, ***Pr*** et ***Reynolds***, ***Re***; quelle est la nature de l'écoulement?
3. Calculer le nombre de ***Nusselt***, ***Nu***, et le coefficient d'échange thermique par convection, ***h***.

B. De l'eau chaude circule à ***80°C*** circule, avec un débit de ***2 litres/s***, dans l'espace annulaire compris entre le tube d'acier et un tube de diamètres intérieur D_1***=50 mm*** et extérieur D_2***=60mm***.
1. Calculer la vitesse de l'écoulement.
2. Calculer le nombre de ***Nusselt***, ***Nu***, et le coefficient d'échange thermique par convection, ***h***.
3. Calculer le flux thermique, ***Φ***, transféré de l'eau à l'huile.

On donne:
- pour l'huile à ***T=50°C:*** $\lambda=0{,}13$ ***W/m.°C;*** $\mu=2\times10^{-3}$ ***Kg/m.s;*** $\rho=1000$ ***Kg/m***^{3}***;*** $C_p=1650$ ***J/Kg.°C;***
- pour l'eau à ***T=80°C:*** $\lambda=0{,}67$ ***W/m.°C;*** $\mu=0{,}35\times10^{-3}$ ***Kg/m.s;*** $\rho=972$ ***Kg/m***^{3}***;*** $C_p=4200$ ***J/Kg.°C***.

Solution:

A- *L'huile circulant dans un tube*:
1. Vitesse de l'écoulement :
Le débit volumique d'un fluide est, par définition, égal à :

$$q_V = SV \Rightarrow V = 4\frac{q_V}{\pi d_1^2}$$

$$A.N.: V \approx 1{,}59\ m/s$$

2. Nombres de ***Prandtl***, ***Pr***, et de ***Reynolds***, ***Re***:

On a :

$$\begin{cases} Pr = \dfrac{\mu C_p}{\lambda} \\ Re = \dfrac{\rho V D_h}{\mu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Pr = \dfrac{\mu C_p}{\lambda} \\ Re = \dfrac{\rho V d_1}{\mu} \end{cases}$$

$$A.N.: \begin{cases} Pr \approx 25{,}4 \\ Re \approx 15915 \end{cases}$$

Re>3000, l'écoulement est donc turbulent.

3. Nombre de ***Nusselt***, ***Nu***, et coefficient d'échange convectif, ***h***:

On a :

$$\begin{cases} Nu = 0{,}023.Re^{0,8}.Pr^{0,33} \\ h = \dfrac{\lambda.Nu}{D_h} \end{cases}$$

$$A.N: \begin{cases} Nu \approx 154 \\ h \approx 1001\ W/m^2.°C \end{cases}$$

B- *L'eau circulant dans un espace annulaire*:

1. Vitesse de l'écoulement :

On a:

$$q_V = S.V \Rightarrow V = 4.\frac{q_V}{\pi.\left(D_1^2 - d_2^2\right)}$$

$$\left(\text{pour un espace annulaire, on a : } D_h = \frac{4.S}{P} \text{ avec } S = \frac{\pi}{4}.\left(D_1^2 - d_2^2\right) \text{ et } P = 2.\pi.\left(D_1 + d_2\right)\right)$$

$$A.N.: V \approx 1{,}36\ m/s$$

2. Nombres de ***Prandtl***, ***Pr***, et de ***Reynolds***, ***Re***:

On a :

$$\begin{cases} Pr = \dfrac{\mu.C_p}{\lambda} \\ Re = \dfrac{\rho.V.D_h}{\mu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Pr = \dfrac{\mu.C_p}{\lambda} \\ Re = \dfrac{\rho.V.\left(D_1 - d_2\right)}{\mu} \end{cases}$$

$$A.N.: \begin{cases} Pr \approx 2{,}2 \\ Re \approx 94423 > 3000 \Rightarrow \text{écoulement turbulent} \end{cases}$$

3. Nombre de ***Nusselt***, ***Nu***, et coefficient d'échange convectif, ***h***:

On a :

$$\begin{cases} Nu = 0{,}023.Re^{0,8}\,.Pr^{0,33} \\ h = \dfrac{\lambda.Nu}{D_h} = \dfrac{\lambda.Nu}{(D_1 - d_2)} \end{cases}$$

$$A.N : \begin{cases} Nu \approx 285 \\ h \approx 7638 W/m^2.°C \end{cases}$$

4. Puissance thermique transférée de l'eau (fluide chaud) à l'huile (fluide froid) à travers la paroi du tube central :

$$\Phi = \frac{T_e - T_h}{R_{th}}$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{T_e - T_h}{R_{cv/e} + R_{cd} + R_{cv/h}}$$

$$\Phi = \frac{T_e - T_h}{\dfrac{1}{\pi d_1 L h_1} + \dfrac{Ln\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)}{2\pi\lambda_a L} + \dfrac{1}{\pi d_2 L h_2}}$$

Donc: $$\Phi' = \frac{\Phi}{L} = \frac{T_e - T_h}{\dfrac{1}{\pi d_1 h_1} + \dfrac{Ln\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)}{2\pi\lambda_a} + \dfrac{1}{\pi d_2 h_2}}$$

$$A.N.: \Phi' \approx 1551 W/m$$

Où ***Φ'*** est la puissance thermique transférée par unité de longueur du tube.

Exercice III.3:

Du mercure à une température moyenne de ***93°C*** s'écoule dans un tube de ***12,5 mm*** de diamètre intérieur avec un débit de ***4540 Kg/h.*** La température de la paroi interne du tube est de ***300°C.***

1. Calculer les nombres de ***Prandtl***, ***Pr*** et de ***Reynolds***, ***Re***. Quelle est la nature de l'écoulement?
2. Calculer le nombre de ***Nusselt***, ***Nu***, et le coefficient d'échange thermique par convection, ***h***.
3. En déduire la puissance thermique échangée, par unité de longueur du tube, entre le mercure et la paroi interne du tube.

On donne pour le mercure à $T_{fm}=93°C$: $\lambda=8{,}9$ Kcal/h.m.°C; $\mu=1{,}25\times10^{-3}$ Kg/m.s; $\rho=13320$ Kg/m^3; $C_p=0{,}033$ Kcal/Kg.°C.

Solution:

1. On a:

$$\begin{cases} Pr = \dfrac{\mu C_p}{\lambda} \\ Re = \dfrac{\rho V D}{\mu} = \dfrac{4 q_m}{\pi \mu D} \end{cases}$$

En effet: $V = \dfrac{q_m}{S} = \dfrac{q_m}{\dfrac{\pi}{4}\rho D^2}$ (q_m est le débit massique)

$$A.N.: \begin{cases} Pr \approx 0{,}017 \\ Re \approx 102764{,}6 \\ V \approx 0{,}77\ m/s \end{cases}$$

$Re \rangle 3000$, l'écoulement du mercure est donc turbulent.

2. Nombre de ***Nusselt Nu*** et coefficient d'échange ***h***:
On utilise la corrélation de ***Séban-Shimazaki*** valable pour les métaux liquides ($Pr<<1$) et pour le cas où la température de la paroi de la conduite est constante:

$$Nu = 4{,}8 + 0{,}025.(Re\,.\,Pr)^{0,8}$$

$$A.N.: \quad Nu \approx 14{,}6$$

Par ailleurs, on a:

$$Nu = \frac{hD}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{Nu\lambda}{D}$$

$$A.N.: \begin{cases} h \approx 10395\ \ Kcal/h.m^2.°C \\ h \approx 12070\ \ W/m^2.°C \end{cases}$$

On rappelle que $6000 \leq h \leq 110000\ W/m^2.°C$ pour un métal liquide dans le cas d'une convection forcée.

3. La puissance thermique échangée entre le mercure et le tube est:

$$\Phi = h.S.(T_p - T_f)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi = \pi.D.L.h.(T_p - T_f)$$

$$\Rightarrow \Phi' = \frac{\Phi}{L} = \pi.D.h.(T_p - T_f)$$

où: T_f et T_p sont, respectivement, les températures du fluide et de la paroi interne du tube.

$$A.N.: \begin{cases} \Phi' \approx 84500\,Kcal/h.m \\ \Phi' \approx 98114\,W/m \end{cases}$$

<u>Exercice III.4:</u>

De l'air froid à $T_f=5°C$ circule à une vitesse de ***10 m/s*** dans une conduite de section rectangulaire de $20\times30\ cm^2$ et de longueur ***L=1,5 m***. La température de la paroi interne de la conduite est de ***150°C***.

1. Calculer les nombres de ***Prandtl***, ***Pr*** et de ***Reynolds***, ***Re***. Quelle est la nature de l'écoulement ?
2. Calculer le nombre de ***Nusselt***, ***Nu***, et le coefficient d'échange thermique par convection, ***h***.
3. En déduire le flux thermique échangé entre l'air et la paroi interne de la conduite.

On donne pour l'air à $T=5°C$: $\lambda=0{,}0208\ Kcal/h.m.°C$; $\mu=1{,}732\times10^{-5}\ Kg/m.s$; $\rho=1{,}296\ Kg/m^3$; $C_p=0{,}24\ Kcal/Kg.°C$.

<u>Solution</u> :



1. Nombres de ***Prandtl***, ***Pr***, et de ***Reynolds***, ***Re*** :
On a :

$$\begin{cases} \mathbf{Pr} = \dfrac{\mu C_p}{\lambda} \\ \mathbf{Re} = \dfrac{\rho V D_h}{\mu} \end{cases}$$

avec : $D_h = \dfrac{4S}{P} = \dfrac{2ab}{a+b}$, diamètre hydraulique.

$$A.N.: \begin{cases} \mathbf{Pr} \approx 0{,}72 \\ D_h \approx 24cm \\ \mathbf{Re} \approx 89792 \end{cases}$$

Re>3000, l'écoulement est donc turbulent.

2. Nombre de ***Nusselt Nu*** et coefficient d'échange ***h*** :
Nu est donné par la corrélation suivante :

$$Nu = 0{,}023 \times \mathrm{Re}^{0{,}8} \times \mathrm{Pr}^{0{,}33}$$

$$A.N.: \quad Nu \approx 189{,}3$$

D'autre part, on a :

$$Nu = \frac{hD_h}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \; h = \frac{Nu\lambda}{D_h}$$

$$A.N.: \begin{cases} h \approx 16{,}4 Kcal/h.m^2.°C \\ h \approx 19 W/m^2.°C \end{cases}$$

3. Puissance thermique échangée entre l'air et la conduite :
On a :

$$\Phi = hS\left(T_p - T_f\right)$$

$$\Rightarrow \; \Phi = 2(a+b)Lh\left(T_p - T_f\right)$$

$$\Rightarrow \; \Phi' = \frac{\Phi}{L} = 2(a+b)h\left(T_p - T_f\right)$$

où T_f et T_p sont respectivement les températures du fluide et de la paroi interne du tube.

$$\text{A.N.}: \begin{cases} \Phi' \approx 2378 Kcal/h.m \\ \Phi' \approx 2755 W/m \end{cases}$$

<u>Exercice III.5</u>: (Extrait de TD de GP-IGM2_ 2012/2013)

De l'eau à $25°C$ alimente un tube, de $2,5\ cm$ de diamètre et de $4,5\ m$ de long, avec un débit de $100\ l/mn$. La température de la surface interne du tube étant constante et égale à $150°C$.

1. Calculer les nombres de ***Prandtl***, ***Pr***, et de ***Reynolds***, ***Re***; quelle est la nature de l'écoulement?
2. Calculer le nombre de ***Nusselt***, ***Nu***, et le coefficient d'échange de chaleur par convection ***h*** entre l'eau et la paroi interne du tube.
3. Calculer la température de l'eau à la sortie T_S et la puissance thermique échangée entre ce fluide et la paroi du tube.

Fluide	$T_m = \frac{T_{f,m} + T_P}{2} \approx T_C$	***ρ (Kg/m³)***	***C_p (J/Kg.°C)***	***λ (W/m.°C)***	***μ (Kg/m.s)***
Eau		***962***	***4180***	***0,67***	***$0,305\times10^{-3}$***

Solution :

- ***Tube:*** ($D = 2,5\ cm$; $L = 4,5\ m$; $T_{pi} = 150°C$).
- Fluide: l'eau de débit volumique $q_v = 100\ l/min$.

1. Nombres de ***Prandtl***, ***Pr***, et de ***Reynolds***, ***Re*** :

On a:

$$\begin{cases} Pr = \frac{\mu . c_p}{\lambda} \approx 1,9 \\ Re = \frac{\rho . V . D_h}{\mu} = \frac{\rho . V . D}{\mu} = \frac{4 . \rho . q_v}{\mu . \pi . D} \approx 268100 \end{cases}$$

$Re > 3000$, le régime d'écoulement est donc ***turbulent***.

2. Nombre de ***Nusselt*** Nu et coefficient d'échange ***h:***

$\frac{L}{D_h} = \frac{L}{D} \approx 180 > 60$, on utilisera donc la corrélation de ***Dittus-Bolter*** valable pour $Re > 10^4$ et $0,7 \leq Pr \leq 120$:

$$Nu = 0,023 \times Re^{0,8} \times Pr^n$$

$T_{f,m} < T_p$ (échauffement du fluide), donc:

$$n = 0,4$$

D'où:

$$Nu = 0,023 \times Re^{0,8} \times Pr^{0,4} \approx 654,4$$

On en déduit le coefficient d'échange convectif h:

$$h = \frac{Nu . \lambda}{D} = 17538\ W/m^2.°C$$

3. Température de l'eau à la sortie T_s et la puissance thermique Φ échangée entre ce fluide et la paroi du tube.

- Température de l'eau à la sortie T_s:

- D'une part, on a:

$$\Phi = h . S . (T_p - T_m) = h . \pi . D . L . (T_p - T_m) \qquad (1)$$

avec:

$$T_m = \frac{T_e + T_s}{2}$$

- D'autre part, on a :

$$\Phi = \dot{m} . c_p . (T_s - T_e) = \rho . q_v . c_p . (T_s - T_e) \qquad (2)$$

En égalant (1) et (2) on tire l'expression de T_s:

$$T_s = \frac{h . \pi . D . L . \left(T_p - \frac{T_e}{2}\right) + \rho . q_v . c_p . T_e}{\frac{h . \pi . D . L}{2} + \rho . q_v . c_p}$$

A.N. : $T_s \approx 104°C$

- Puissance thermique Φ échangée entre l'eau et la paroi du tube:

$$\Phi \approx 529967\ W \approx 530\ KW$$

***Exercice III.6*: (Extrait du contrôle de EGP-PCM_2009/2010)**

Un échangeur de chaleur tubulaire coaxial composé de deux tubes cylindriques coaxiaux, de même longueur $L=10\ m$, destiné à refroidir un débit volumique $q_{V,C}=0,7\times10^{-3}\ m^3/s$ de dodécane (hydrocarbure de formule chimique $C_{12}H_{26}$) de $T_{C,e}=120°C$ (température d'entrée dans l'échangeur) à $T_{C,s}=60°C$ (température de sortie de l'échangeur) avec de l'eau industrielle à $T_{F,e}=20°C$ (température d'entrée) circulant avec un débit volumique $q_{V,F}=0,56\times10^{-3}\ m^3/s$ dans l'espace annulaire compris entre les deux tubes (***figure 3***).

Le tube central, dans lequel circule le dodécane, a un diamètre intérieur $D_1=25\ mm$ et une épaisseur $e=2,5\ mm$. Le tube externe a un diamètre intérieur $D_3=40\ mm$, et la même épaisseur e (***figure 3***).

Le métal constituant les tubes est l'acier de conductivité thermique $\lambda_a=50\ W/m.°C$.

1. Pour le dodécane, calculer:
   - ***a)*** les nombres de *Prandtl*, ***Pr*** et de *Reynolds*, ***Re***; quelle est la nature de l'écoulement?
   - ***b)*** le nombre de *Nusselt*, ***Nu***, et le coefficient d'échange de chaleur par convection h_1 entre le dodécane et la paroi interne du tube central.
2. Pour l'eau industrielle, calculer:
   - ***a)*** les nombres de *Prandtl*, ***Pr*** et de *Reynolds*, ***Re***; quelle est la nature de l'écoulement?
   - ***b)*** le nombre de *Nusselt*, ***Nu***, et le coefficient d'échange thermique par convection h_2 entre l'eau et la paroi externe du tube central.
3. Calculer la puissance thermique cédée par le dodécane en se refroidissant de $T_{C,e}$ à $T_{C,s}$. En déduire la température de sortie $T_{F,s}$ de l'eau industrielle, sachant qu'on néglige les pertes thermiques à travers l'enveloppe externe de l'échangeur.
4. Calculer la résistance thermique globale $R_{th,eq}$, en déduire le coefficient d'échange de chaleur global entre le dodécane et l'eau industrielle, basé sur la surface externe S_2 du tube central. On rappelle que K est défini par: $K=\frac{1}{S_2\times R_{th,eq}}$.

***Données**: Propriétés thermophysiques des fluides utilisés*

Fluide	ρ *(Kg/m³)*	C_p *(J/Kg.°C)*	λ *(W/m.°C)*	μ *(Kg/m.s)*
Dodécane	*750*	*2260*	*0,151*	$0,75\times10^{-3}$
Eau industrielle	*1000*	*4180*	*0,607*	$0,89\times10^{-3}$

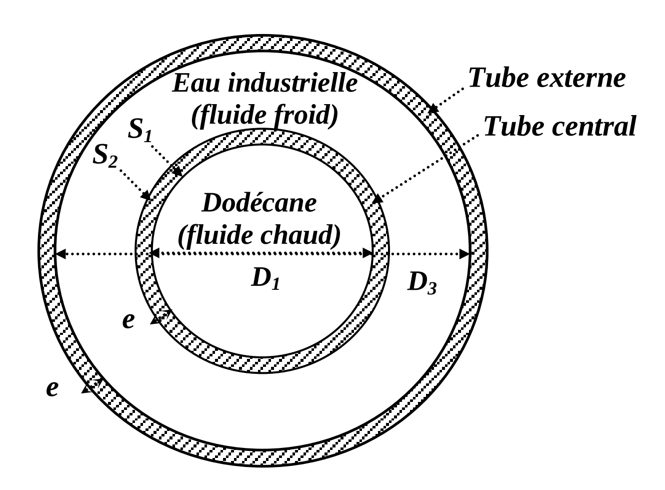


***Figure*: échangeur tubulaire coaxial (coupe transversale).**

Solution:

1- ***Dodécane***: fluide circulant à l'intérieur du tube central (D_1, $D_2=D_1+2.e$)

a) Nombres de ***Prandtl***, ***Pr***, et de ***Reynolds***, ***Re*** :

On a:

$$\begin{cases} Pr = \frac{\mu . c_p}{\lambda} \approx \mathbf{11,2} \\ Re = \frac{\rho . V . D_h}{\mu} = \frac{\rho . V . D_1}{\mu} = \frac{4 . \rho . q_{V,C}}{\mu . \pi . D_1} \approx \mathbf{35651} \end{cases}$$

Re>3000, le régime d'écoulement est donc ***turbulent***.

b) Nombre de ***Nusselt Nu*** et coefficient d'échange h_i:
$\frac{L}{D_h} = \frac{L}{D_1} \approx \mathbf{400} > 60$, on utilise donc la corrélation de ***Sieder*** et ***Tate***, valable pour $Re \geq 10^4$ et $0,7 \leq Pr \leq 16700$:

$$Nu = 0,027 \times Re^{0,8} \times Pr^{\frac{1}{3}}$$

$$A.N.: \quad Nu \approx 265$$

On en déduit le coefficient d'échange convectif h_1:

$$h_1 = \frac{Nu . \lambda}{D_1}$$

$$A.N.: \quad h_1 \approx 1600 \ W/m^2 . °C$$

2- L'eau industrielle: fluide circulant dans l'espace annulaire compris entre le tube central (D_1, $D_2 = D_1 + 2.e$) et le tube externe (D_3, D_4).

a) Nombres de ***Prandtl***, ***Pr***, et de ***Reynolds***, ***Re*** :
On a:

$$\begin{cases} Pr = \frac{\mu . c_p}{\lambda} \approx \mathbf{6,1} \\ Re = \frac{\rho . V . D_h}{\mu} = \frac{4 . \rho . q_{V,F}}{\mu . \pi . (D_3 - D_2)} \approx \mathbf{11445} \end{cases}$$

Re>3000, le régime d'écoulement est donc ***turbulent***.

b) Nombre de ***Nusselt Nu*** et coefficient d'échange h_2:
Pour calculer ***Nu***, on utilise la corrélation de ***Sieder*** et ***Tate***, valable pour $Re \geq 10^4$ et $0,7 \leq Pr \leq 16700$:

$$Nu = 0,027 \times Re^{0,8} \times Pr^{\frac{1}{3}}$$

$$A.N.: \quad Nu \approx 85,25$$

c) On en déduit le coefficient d'échange convectif h_2:

$$h_2 = \frac{Nu . \lambda}{D_2}$$

$$A.N.: \quad h_2 \approx 5296 \ W| m^2 . °C$$

3- Puissance thermique cédée par le dodécane en se refroidissant de $T_{C,e}$ à $T_{C,s}$
Elle est donnée par la relation:

$$\Phi = \dot{m}_C \times c_{p,c} \times (T_{c,e} - T_{c,s}) = \rho_C \times q_{V,C} \times c_{p,c} \times (T_{c,e} - T_{c,s})$$
$$\Phi \approx 71190 \ W$$

Cette puissance est intégralement reçue par l'eau industrielle (fluide froid), provoquant une augmentation de sa température de $T_{F,e}$ à $T_{F,s}$.

$$\Phi = \dot{m}_F \times c_{p,F} \times (T_{F,s} - T_{F,e}) = \rho_F \times q_{V,F} \times c_{p,F} \times (T_{F,s} - T_{F,e})$$

D'où on tire l'expression de $T_{F,s}$:

$$T_{F,s} = T_{F,e} + \frac{\Phi}{\rho_F \times q_{V,F} \times c_{p,F}} \approx 50{,}4°C$$

4- Résistance thermique globale $R_{th,eq}$

On a:

$$R_{th,eq} = R_{cv,1} + R_{cd} + R_{cv,2}$$

$$R_{th,eq} = \frac{1}{h_1 \times (\pi.D_1.L)} + \frac{Ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2.\pi.\lambda_{Cu}.L} + \frac{1}{h_2 \times (\pi.D_2.L)}$$

$$A.N.: R_{th,eq} \approx 1{,}05 \times 10^{-3}\ °C/W$$

Il en découle que le coefficient global d'échange thermique K vaut:

$$K = \frac{1}{R_{th,eq} \times S_2} = \frac{1}{R_{th,eq} \times (\pi.D_2.L)} \approx 1007\ W/m^2.°C$$

<u>Exercice III.7:</u>

De l'huile à la température moyenne $T_C = \frac{T_{Ce} + T_{Cs}}{2} = 94°C$ s'écoule, à une vitesse de ***5 m/s***, à l'intérieur d'un tube en cuivre ($\lambda_{Cu}=386\ W/m.°C$) de diamètres interne $D_i=13{,}2\ mm$ et externe $D_e=15{,}6\ mm$ et de longueur $L=2\ m$. De l'eau froide à la température moyenne $T_F=27°C$ circule perpendiculairement à l'axe du tube à une vitesse de ***1,5 m/s***.

1- Pour l'huile, calculer:
- ***a)*** les nombres de ***Prandtl***, ***Pr*** et de ***Reynolds***, ***Re***; quelle est la nature de l'écoulement?
- ***b)*** le nombre de ***Nusselt***, ***Nu***, et le coefficient d'échange de chaleur par convection h_i entre l'huile et la paroi interne du tube.

2- Pour l'eau, calculer:
- ***a)*** les nombres de ***Prandtl***, ***Pr*** et de ***Reynolds***, ***Re***; quelle est la nature de l'écoulement?
- ***b)*** le nombre de ***Nusselt***, ***Nu***, et le coefficient d'échange thermique par convection h_e entre l'eau et la paroi externe du tube.

3- Calculer la résistance thermique globale, en déduire le coefficient d'échange de chaleur global entre l'huile et l'eau, basé sur la surface externe du tube. On rappelle que K est défini par: $K = \frac{1}{S_e \times R_{th,eq}}$.

Fluide	$T_m = \frac{T_{fm} + T_P}{2}$	ρ (Kg/m³)	C_p (J/Kg.°C)	λ (W/m.°C)	μ (Kg/m.s)
Huile	60,5°C	880	2006,4	0,1295	$\mu_m=7{,}78\times10^{-3}$
	$T_P\approx27°C$				$\mu_P=22{,}78\times10^{-3}$
Eau	27°C	995	4172	0,61	$0{,}86\times10^{-3}$

<u>Solution:</u>

1- L'huile : fluide circulant à l'intérieur du tube en cuivre ($D_i=13{,}2\ mm$, $D_e=15{,}6\ mm$)

4. Nombres de ***Prandtl***, ***Pr***, et de ***Reynolds***, ***Re*** :

On a:

$$\begin{cases} Pr = \frac{\mu.c_p}{\lambda} \approx 120{,}5 \\ Re = \frac{\rho.V.D_h}{\mu} = \frac{\rho.V.D_i}{\mu} \approx 7465 \end{cases}$$

Re>3000, le régime d'écoulement est donc ***turbulent***.

5. Nombre de ***Nusselt Nu*** et coefficient d'échange ***h$_i$:***

$\frac{L}{D_h} = \frac{L}{D_i} \approx \mathbf{151,5} > 60$, on utilisera donc la corrélation de ***Sieder*** et ***Tate***, valable pour $\boldsymbol{Re \geq 10^4}$ et $\boldsymbol{0,7 \leq Pr \leq 16700}$:

$$Nu = 0,027 \times Re^{0,8} \times Pr^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^{0,14}$$

$$A.N.: \quad Nu \approx 143,9$$

On en déduit le coefficient d'échange convectif h_i:

$$h_i = \frac{Nu.\lambda}{D_i}$$

$$A.N.: \quad h_i \approx 1412 \ W/m^2.°C$$

2- L'eau: fluide circulant à l'extérieur du tube et perpendiculairement à son axe.

a)Nombres de ***Prandtl***, ***Pr***, et de ***Reynolds***, ***Re*** :

On a:

$$\begin{cases} Pr = \frac{\mu.c_p}{\lambda} \approx 5,9 \\ Re = \frac{\rho.V.D_e}{\mu} \approx 27073 \end{cases}$$

b)Nombre de ***Nusselt Nu*** et coefficient d'échange ***h$_i$:***

On utilise la corrélation de ***Knudsen*** et ***Katz*** :

$$Nu = 1,11 \times A \times Re^m \times Pr^{0,31}$$

$\boldsymbol{Re = 27073 \approx 2,7 \times 10^4 \quad \in \quad [4 \times 10^3;\ 4 \times 10^4]}$

Donc, d'après la table (voir cours), on a :

$$\begin{cases} m = 0,618 \\ A = 0,174 \end{cases}$$

Il s'en suit que:

$$Nu \approx 183,5$$

On en déduit le coefficient d'échange convectif h_e:

$$h_e = \frac{Nu.\lambda}{D_e}$$

$$A.N.: \quad h_e \approx 7176 \ W/m^2.°C$$

3- Coefficient global d'échange thermique ***K***:

On a:

$$R_{th,eq} = R_{cv,i} + R_{cd} + R_{cv,e}$$

$$R_{th,eq} = \frac{1}{h_i \times (\pi.D_i.L)} + \frac{Ln\left(\frac{D_e}{D_i}\right)}{2.\pi.\lambda_{Cu}.L} + \frac{1}{h_e \times (\pi.D_e.L)}$$

$$A.N.: R_{th,eq} \approx 0,01 \ °C/W$$

Il s'en suit que:

$$K = \frac{1}{R_{th,eq} \times S_e} \approx 1021 \ W/m^2.°C$$

Exercice III.8: (Extrait de TD de GP-IGM2_ 2012/2013 et du contrôle de EGP-PCM_2011/2012)

Un échangeur de chaleur tubulaire coaxial composé de deux tubes cylindriques coaxiaux, de même longueur ***L=20 m***, est utilisé pour préchauffer un gaz de $T_{F,e}$= ***-5°C*** (température d'entrée dans l'échangeur) à $T_{F,s}$***=55°C*** (température de sortie de l'échangeur). Le gaz s'écoule, avec un débit massique de ***0,25 kg/s***, dans le tube intérieur de diamètres interne $D_i=0,15\ m$ et externe $D_e=0,16\ m$. De l'eau chaude à une température moyenne $T_C=80°C$ circule dans l'espace annulaire compris entre les deux tubes (voir ***figure ci-après***). Le métal constituant les tubes est l'acier de conductivité thermique $\lambda_a=50\ W/m.°C$. Le coefficient caractérisant l'échange de chaleur par convection entre l'eau chaude et la paroi externe (S_e) du tube intérieur est $h_e=5225\ W/m^2.°C$. La paroi externe (S_e) du tube intérieur est recouverte, d'une couche de calcaire, de très faible épaisseur, de résistance thermique $r_{cd,cal}=3,5\times10^{-4}\ m^2.°C/W$.

1. Pour le gaz, calculer:
   a) les nombres de ***Prandtl***, ***Pr*** et de ***Reynolds***, ***Re***; quelle est la nature de l'écoulement?
   b) le nombre de ***Nusselt***, ***Nu***, et le coefficient d'échange thermique par convection h_i entre le gaz et la paroi interne du tube intérieur.
2. Calculer la puissance thermique reçue par le gaz en s'échauffant de $T_{F,e}$ à $T_{F,s}$.
3. Donner l'expression de :
- la résistance thermique de conduction du tube intérieur $R_{cd,a}$,
- la résistance thermique de conduction de la couche de calcaire $R_{cd,cal}$,
- la résistance thermique de convection du côté du gaz $R_{CV,i}$,
- la résistance thermique de convection du côté de l'eau $R_{CV,e}$,
4. Calculer les températures T_{pi} et T_{pe} sur les surfaces interne et externe du tube intérieur.

Données :
- pour le gaz: $\lambda=0,024\ W/m.°C$; $\mu=1,16\times10^{-5}\ Kg/m.s$; $\rho=4,21\ Kg/m^3$; $c_p=585\ J/Kg.°C$.
- Pour calculer le nombre de ***Nusselt***, ***Nu***, dans le cas des écoulements turbulents ***(Re>3000)*** à l'intérieur des conduites très longues ($\frac{L}{D_h}>60$), on utilisera la corrélation de ***Sieder*** et ***Tate***, valable pour ***un gaz***:

$$Nu = 0,023.Re^{0,8}.Pr^{0,4}$$

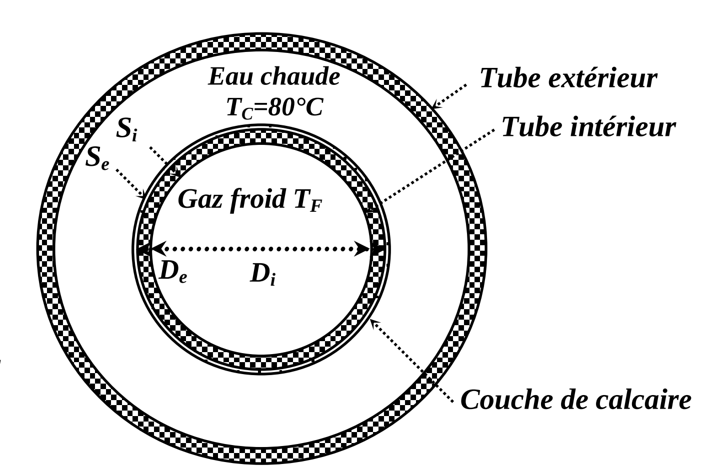


Figure: échangeur tubulaire coaxial (coupe transversale).

Solution:

1. ***Le gaz***: fluide froid circulant à l'intérieur du tube en acier ($D_i = 0,15\ m$ et $D_e = 0,16\ m$)

a) Nombres de ***Prandtl***, ***Pr***, et de ***Reynolds***, ***Re*** :

On a:

$$\begin{cases} Pr = \frac{\mu.c_p}{\lambda} \approx 0,283 \\ Re = \frac{\rho.V.D_h}{\mu} = \frac{\rho.V.D_i}{\mu} = \frac{4.q_m}{\mu.\pi.D_i} \approx 182937 \end{cases}$$

$\boldsymbol{Re} > 3000$, le régime d'écoulement est donc ***turbulent***.

b) Nombre de ***Nusselt*** $\boldsymbol{Nu}$ et coefficient d'échange $\boldsymbol{h_i}$**:**

Pour calculer le nombre de ***Nusselt***, ***Nu***, dans le cas des écoulements turbulents ***(Re>3000)*** à l'intérieur des conduites très longues ($\frac{L}{D_h} = \frac{L}{D_i} \approx \mathbf{133,3} > 60$,), on utilise la corrélation de ***Sieder*** et ***Tate***, valable pour ***un gaz***:

$$\boldsymbol{Nu = 0,023.Re^{0,8}.Pr^{0,4} \approx 225}$$

On en déduit le coefficient d'échange convectif $\boldsymbol{h_i}$:

$$\boldsymbol{h_i = \frac{Nu.\lambda}{D_i} \approx 36\ W/m^2.°C}$$

2. Puissance thermique reçue par le gaz en s'échauffant de $\boldsymbol{T_{F,e}}$ à $\boldsymbol{T_{F,s}}$.

$$\boldsymbol{\Phi = \dot{m}_F.c_{pF}.\left(T_{F,s} - T_{F,e}\right) = 8775\ W}$$

3. Résistances thermiques:

- Résistance thermique de conduction du tube intérieur $\boldsymbol{R_{cd,a}}$:

$$\boldsymbol{R_{cd,a} = \frac{Ln\left(\frac{D_e}{D_i}\right)}{2.\pi.\lambda_a.L} \approx 1,027 \times 10^{-5}\ °C/W}$$

- Résistance thermique de conduction de la couche de calcaire $\boldsymbol{R_{cd,cal}}$ **:**

$$\boldsymbol{R_{cd,cal} = \frac{r_{cd,cal}}{S'_e} \approx \frac{r_{cd,cal}}{S_e} = \frac{r_{cd,cal}}{\pi.D_e.L} \approx 3,48 \times 10^{-5}\ °C/W}$$

- Résistance thermique de convection du côté du gaz $\boldsymbol{R_{CV,i}}$:

$$\boldsymbol{R_{CV,i} = \frac{1}{h_i.S_i} = \frac{1}{h_i.\pi.D_i.L} \approx 2,95 \times 10^{-3}\ °C/W}$$

- Résistance thermique de convection du côté de l'eau $\boldsymbol{R_{CV,e}}$:

$$\boldsymbol{R_{CV,e} = \frac{1}{h_e.S'_e} \approx \frac{1}{h_e.S_e} = \frac{1}{h_e.\pi.D_e.L} \approx 1,904 \times 10^{-5}\ °C/W}$$

4. Températures $\boldsymbol{T_{pi}}$ et $\boldsymbol{T_{pe}}$ sur les surfaces interne et externe du tube intérieur.

- Circuit thermique :

Φ ; T_C — $R_{CV,e}$ — T_{pe} — $R_{cd,cal}$ — $R_{cd,a}$ — T_{pi} — $R_{CV,i}$ — T_F

- D'après le circuit, on a:

$$\boldsymbol{\Phi = \frac{T_C - T_{pe}}{R_{CV,e}} \quad \Rightarrow \quad T_{pe} = T_C - \left(\Phi \times R_{CV,e}\right) \approx 79,8°C}$$

et

$$\boldsymbol{\Phi = \frac{T_{pe} - T_{pi}}{R_{cd,cal} + R_{cd,a}} \quad \Rightarrow \quad T_{pi} = T_{pe} - \left(\Phi \times \left(R_{cd,cal} + R_{cd,a}\right)\right) \approx 79,4°C}$$

***Exercice III.9*: (Extrait de TD de GP-IGM2_ 2012/2013 et du contrôle de EGP-PCM_2010/2011)**

Un échangeur de chaleur tubulaire coaxial, composé de deux tubes cylindriques coaxiaux de même longueur, est utilisé pour condenser de la vapeur d'eau saturée à une température $T_C=40°C$ et sous une pression $p_S=0,07375$ bar. De l'eau froide à une température moyenne $T_F=10°C$ s'écoule à **3 m/s** à travers le tube intérieur en cuivre ($\lambda_{Cu}=386$ W/m.°C, diamètre intérieur $D_1=30$ mm et diamètre extérieur $D_2=35$ mm). La vapeur à condenser s'écoule dans l'espace annulaire compris entre la surface externe du tube intérieur et la surface interne du tube extérieur. Le coefficient caractérisant l'échange de chaleur entre la vapeur, se condensant sur la paroi externe (S_2) du tube intérieur, et la paroi elle-même est $h_2=5670$ W/m^2.°C. La résistance thermique d'une couche de calcaire, de très faible épaisseur, formée sur la surface externe (S_2) du tube intérieur est $r_{cd,cal}=1,72\times10^{-4}$ m^2.°C/W.

1. Pour l'eau froide, calculer:

a) les nombres de ***Prandtl***, ***Pr*** et de ***Reynolds***, ***Re***; quelle est la nature de l'écoulement?

b) le nombre de ***Nusselt***, ***Nu***, et le coefficient d'échange thermique par convection h_1 entre l'eau froide et la paroi interne du tube intérieur.

2. Donner l'expression de :

- la résistance thermique de conduction du tube intérieur $R_{cd,Cu}$,
- la résistance thermique de conduction de la couche de calcaire $R_{cd,Cal}$,
- la résistance thermique de convection du côté de l'eau froide R_{CV1},
- la résistance thermique de convection du côté de la vapeur d'eau R_{CV2},

3. En déduire le coefficient d'échange de chaleur global, noté ***K***, entre la vapeur et l'eau, basé sur la surface externe S_2 du tube intérieur. Il définit par: $K = \dfrac{1}{S_2 \times R_{th,eq}}$.

4. Calculer le flux de chaleur échangé, par unité de longueur du tube, entre la vapeur d'eau et l'eau froide. En déduire la température T_{pi} sur la surface interne du tube intérieur.

5. Calculer la longueur de l'échangeur nécessaire pour condenser ***250 g/s*** de vapeur d'eau.

Données :

- pour l'eau à $T_m=0,5\times(T_F+T_P)\approx T_F=10°C$: $\lambda=0,572$ W/m.°C; $\mu=1,31\times10^{-3}$ Kg/m.s; $\rho=1000$ Kg/m^3; $C_p=4180$ J/Kg.°C.
- pour la vapeur saturante *à* $T=40°C$: $L_C=2422$ KJ/Kg (chaleur latente de condensation de la vapeur d'eau).

- Pour calculer le nombre de ***Nusselt***, ***Nu***, dans le cas des écoulements turbulents ***(Re>3000)*** à l'intérieur des conduites très longues ($\dfrac{L}{D_h} > 60$), on utilisera la corrélation de ***Dittus-Boelter***, valable pour $Re\geq10^4$ et $0,7\leq Pr\leq120$:

$$Nu = 0,023 \times Re^{0,8} \times Pr^{0,4}$$

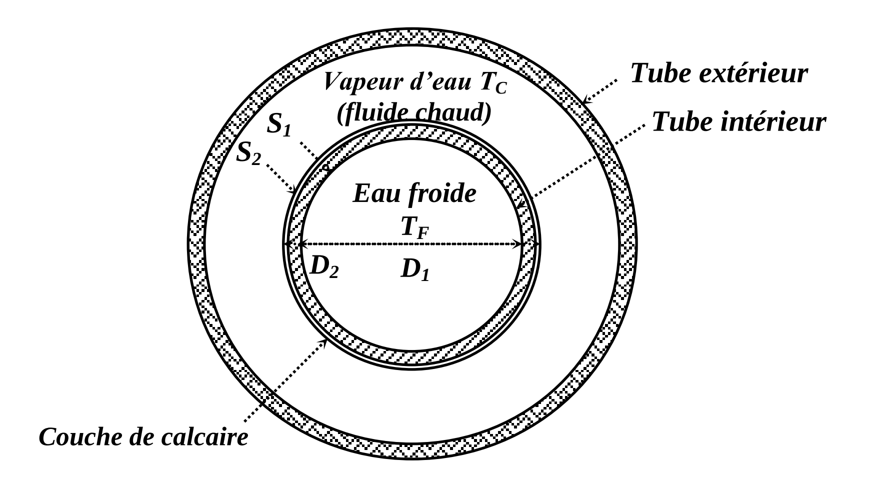


***Figure*: échangeur tubulaire coaxial (coupe transversale).**

Solution:

1. ***L'eau***: fluide froid circulant dans le tube intérieur en cuivre ($\boldsymbol{D_1 = 30\ mm}$ et $\boldsymbol{D_2 = 35\ mm}$)

a) Nombres de ***Prandtl***, ***Pr***, et de ***Reynolds***, ***Re*** :

On a:

$$\begin{cases} Pr = \dfrac{\mu . c_p}{\lambda} \approx 9,57 \\ Re = \dfrac{\rho . V . D_h}{\mu} = \dfrac{\rho . V . D_1}{\mu} \approx 68702 \end{cases}$$

$Re > 3000$, le régime d'écoulement est donc ***turbulent***.

b) Nombre de ***Nusselt Nu*** et coefficient d'échange h_1***:***

Pour calculer le nombre de ***Nusselt***, ***Nu***, dans le cas des écoulements turbulents ***(Re>3000)*** à l'intérieur des conduites très longues ($\frac{L}{D_h} > 60$), on utilisera la corrélation de ***Dittus-Boelter***, valable pour $Re \geq 10^4$ et $0,7 \leq Pr \leq 120$:

$$Nu = 0,023 \times Re^{0,8} \times Pr^{0,4} \approx 420,4$$

On en déduit le coefficient d'échange convectif h_1:

$$h_1 = \frac{Nu . \lambda}{D_1} \approx 8015,6\ W/m^2 . °C$$

2. Résistances thermiques:

- Résistance thermique de conduction du tube intérieur $R_{cd,Cu}$:

$$R_{cd,Cu} = \frac{Ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2 . \pi . \lambda_{Cu} . L}$$

- Résistance thermique de conduction de la couche de calcaire $R_{cd,cal}$:

$$R_{cd,cal} = \frac{r_{cd,cal}}{S'_2} \approx \frac{r_{cd,cal}}{S_2} = \frac{r_{cd,cal}}{\pi . D_2 . L}$$

- Résistance thermique de convection du côté de l'eau froide $R_{CV,1}$:

$$R_{CV,1} = \frac{1}{h_1 . S_1} = \frac{1}{h_1 . \pi . D_1 . L}$$

- Résistance thermique de convection du côté de la vapeur d'eau $R_{CV,2}$:

$$R_{CV,2} = \frac{1}{h_2 . S'_2} \approx \frac{1}{h_2 . S_2} = \frac{1}{h_2 . \pi . D_2 . L}$$

3. Coefficient d'échange de chaleur global K, entre la vapeur et l'eau, basé sur la surface externe S_2 du tube intérieur :

$$K = \frac{1}{S_2 \times R_{th,eq}}$$

avec:

$$R_{th,eq} = R_{cd,Cu} + R_{cd,cal} + R_{CV,1} + R_{CV,2}$$

$$K = \frac{1}{S_2 \times \left(\dfrac{Ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2 . \pi . \lambda_{Cu} . L} + \dfrac{r_{cd,cal}}{S_2} + \dfrac{1}{h_1 . S_1} + \dfrac{1}{h_2 . S_2} \right)}$$

$$K = \frac{1}{\frac{D_2 . Ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2.\lambda_{Cu}} + r_{cd,cal} + \frac{D_2}{h_1 . D_1} + \frac{1}{h_2}} \approx 1996,4\ W/m^2.°C$$

4. Flux de chaleur échangé, par unité de longueur du tube, entre la vapeur d'eau et l'eau froide.

$$\Phi = \frac{T_C - T_F}{R_{th,eq}} = K.S_2.(T_C - T_F) = K.\pi.D_2.L.(T_C - T_F)$$

$$\Phi' = \frac{\Phi}{L} = K.\pi.D_2.(T_C - T_F) \approx 6585,5\ W$$

On en déduit la température T_{pi} sur la surface interne du tube intérieur.

$$\Phi' = \frac{\Phi}{L} = \frac{h_1.S_1.(T_{pi} - T_F)}{L} = h_1.\pi.D_1.(T_{pi} - T_F)$$

D'où :

$$T_{pi} = T_F + \frac{\Phi'}{h_1.\pi.D_1} \approx 18,7°C$$

5. Longueur de l'échangeur nécessaire pour condenser $250\ g/s$ de vapeur d'eau :

$$\Phi = \dot{m} \times L_C \quad \Rightarrow \quad \Phi'.L = \dot{m} \times L_C$$

D'où :

$$L = \frac{\dot{m} \times L_C}{\Phi'} \approx 92\ m$$

***Exercice III.10**: (Extrait de TD de GP-IGM2_ 2012/2013)*

Une plaque verticale, de longueur $L = 2\ m$ et de température uniforme $T_S = 60°C$, est plongée dans l'eau à la température $T_\infty = 20°C$. Calculer la puissance thermique échangée par convection naturelle entre la plaque et l'eau. On donne: $g = 9,81\ m/s^2$.

Fluide	$T_m = \frac{T_\infty + T_S}{2}$	*ρ (Kg/m^3)*	*C_p (J/Kg.°C)*	*λ (W/m.°C)*	*μ (Kg/m.s)*	*β (°C^{-1})*
Eau	*40°C*	*992*	*4178*	*0,627*	*$0,653\times10^{-3}$*	*$0,38\times10^{-3}$*

Solution:

Pour calculer la puissance thermique échangée entre l'eau et la plaque par convection naturelle, on a besoin de la valeur du coefficient d'échange de chaleur par convection h.

Calculons h :
Convection naturelle ⇒ $h = f(Pr, Gr)$

Calculons tout d'abord le nombre de ***Prandtl*** Pr et le nombre de ***Grashof*** Gr :

$$\begin{cases} Pr = \frac{\mu.c_p}{\lambda} \approx 4,35 \\ Gr = \frac{L^3.\rho^2.g.\beta.\Delta T}{\mu^2} \approx 2,75 \times 10^{12} \end{cases}$$

avec : $\Delta T = |T_S - T_\infty|$

On en déduit la valeur du nombre de ***Rayleigh***:

$Ra = Pr \times Gr \approx 10^{13}$ ⇒ le régime est donc turbulent

Donc:

$$Nu = C \times (Gr \times Pr)^n \quad avec: \begin{cases} C = 0,13 \\ n = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad Nu = 0,13 \times (Gr \times Pr)^{\frac{1}{3}} \approx 2973$$

Il s'en suit que :

$$h = \frac{Nu.\lambda}{L} \approx 932 \ W/m^2.°C$$

Finalement, on en déduit la puissance thermique échangée, par convection naturelle, entre l'eau et la plaque:

$$\Phi = h.S.(T_S - T_\infty)$$
$$\varphi = h.(T_S - T_\infty) = 37280 \, W/m^2$$

***Exercice III.11**: (Extrait du contrôle d'éléments de génie des procédés-LST-PCM, 2012/2013)*

Pour chauffer une solution d'aniline, on utilise un échangeur de chaleur tubulaire coaxial composé de deux tubes cylindriques coaxiaux de même longueur. La solution d'aniline, à la température moyenne $T_F = 20°C$, s'écoule dans le tube intérieur en verre ($D_1 = 25\,mm$, $D_2 = 28\,mm$, $L = 10\,m$ et $\lambda_{ver} = 0,78\,W/m.°C$) avec un débit $q_v = 1,9 \times 10^{-3}\ m^3/s$. De l'eau chaude, à la température moyenne $T_C = 82°C$ circule, avec une vitesse de $2,5\,m/s$, dans l'espace annulaire compris entre le tube intérieur de verre, parcouru par la solution d'aniline, et un tube extérieur de diamètre interne $D_3 = 40,7\,mm$. La paroi externe (S_2) du tube intérieur est recouverte d'une couche de calcaire de très faible épaisseur et de résistance thermique $r_{cd,cal} = 2 \times 10^{-4}\,m^2.°C/W$.

1. Pour la solution d'aniline, calculer:

a) les nombres de ***Prandtl*** Pr et de ***Reynolds*** Re; quelle est la nature de l'écoulement?

b) le nombre de ***Nusselt*** Nu et le coefficient d'échange thermique par convection h_1 entre la solution d'aniline et la paroi interne du tube intérieur.

2. Pour l'eau, calculer:

a) les nombres de ***Prandtl*** Pr et de ***Reynolds*** Re; quelle est la nature de l'écoulement?

b) le nombre de ***Nusselt*** Nu et le coefficient d'échange thermique par convection h_2 entre l'eau et la paroi externe du tube intérieur.

3. Calculer:

- la résistance thermique de conduction du tube intérieur $R_{cd,ver}$,
- la résistance thermique de conduction de la couche de calcaire $R_{cd,cal}$,
- la résistance thermique de convection du côté de la solution d'aniline $R_{cv,1}$,
- la résistance thermique de convection du côté de l'eau $R_{cv,2}$,

4. Calculer la puissance thermique Φ transférée de l'eau à la solution d'aniline.

Données :

- ***Propriétés thermophysiques des fluides :***

Fluide	$\rho\ (Kg/m^3)$	$C_p\ (J/Kg.°C)$	$\lambda\ (V/m.°C)$	$\mu\ (Kg/m.s)$
Solution d'aniline	1030	2090	$0,173$	$5,1 \times 10^{-3}$
Eau	980	4180	$0,673$	$0,308 \times 10^{-3}$

- ***Corrélation:***

Pour calculer le nombre de ***Nusselt*** Nu dans le cas des écoulements turbulents *($Re > 3000$)* à l'intérieur des conduites très longues ($\frac{L}{D_h} > 60$), on utilisera la corrélation de ***Colburn*** valable pour $Pr > 0,5$ et $10^4 \leq Re \leq 12 \times 10^4$:

$$Nu = 0,023 \times Re^{0,8} \times Pr^{0,33}$$

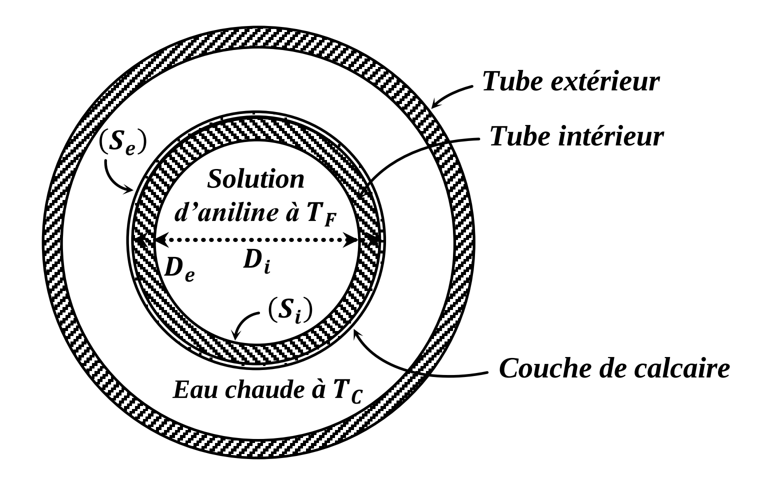


***Figure*: échangeur tubulaire coaxial (coupe transversale).**

Solution:

1. ***Solution d'aniline***: fluide circulant dans le tube intérieur en verre (D_1, D_2, L et λ_{ver})

   a) Nombres de ***Prandtl***, ***Pr***, et de ***Reynolds***, ***Re*** :

On a:

$$\begin{cases} Pr = \dfrac{\mu . c_p}{\lambda} \approx 61,61 \\ Re = \dfrac{\rho . V . D_h}{\mu} = \dfrac{\rho . V . D_1}{\mu} = \dfrac{4 . q_v . \rho}{\mu . \pi . D_1} \approx 19543 \end{cases}$$

$Re > 3000$, le régime d'écoulement est donc ***turbulent***.

b) Nombre de ***Nusselt*** Nu et coefficient d'échange h_i:

$\frac{L}{D_h} = \frac{L}{D_1} \approx 600 > 60$, $Pr > 0{,}5$ et $10^4 \leq (Re \approx 2 \times 10^4) \leq 12 \times 10^4$, on utilisera donc la corrélation de ***Colburn*** :

$$Nu = 0,023 \times Re^{0,8} \times Pr^{0,33}$$

$$\text{A.N. :} \quad Nu = 242,7 \approx 243$$

On en déduit le coefficient d'échange convectif h_1:

$$h_1 = \frac{Nu . \lambda}{D_1}$$

$$\text{A.N.:} \quad h_1 = 1679,5 \ W/m^2 . ^\circ C \approx 1680 \ W/m^2 . ^\circ C$$

2. ***L'eau***: fluide circulant dans l'espace annulaire (D_2, D_3, L)

   a) Nombres de ***Prandtl***, Pr, et de ***Reynolds***, Re:

On a:

$$\begin{cases} Pr = \dfrac{\mu . c_p}{\lambda} \approx 1,913 \\ Re = \dfrac{\rho . V . D_h}{\mu} = \dfrac{\rho . V . (D_3 - D_2)}{\mu} \approx 101022,7 \end{cases}$$

On rappelle que :

$$D_h = \frac{4 . S}{P} = \frac{4 . (S_3 - S_2)}{P_2 + P_3} = D_3 - D_2$$

$\boldsymbol{Re} > 3000$, le régime d'écoulement est donc ***turbulent***.

b) Nombre de ***Nusselt*** $\boldsymbol{Nu}$ et coefficient d'échange $\boldsymbol{h_2}$:
$\frac{L}{D_h} = \frac{L}{D_1} \approx \mathbf{600} > 60$, $\boldsymbol{Pr} > 0{,}5$ et $\mathbf{10^4} \leq (\boldsymbol{Re} \approx \mathbf{10{,}1 \times 10^4}) \leq \mathbf{12 \times 10^4}$, on utilisera donc la corrélation de ***Colburn*** :

$$Nu = 0{,}023 \times Re^{0,8} \times Pr^{0,33}$$

$$\textit{A.N. :} \quad Nu \approx 287{,}2$$

On en déduit le coefficient d'échange convectif $\boldsymbol{h_2}$:

$$h_2 = \frac{Nu.\lambda}{D_h} = \frac{Nu.\lambda}{D_3 - D_2}$$

$$\textit{A.N.:} \quad h_2 \approx 15221 \ W/m^2.°C$$

3. Résistances thermiques:

- Résistance thermique de conduction du tube intérieur $\boldsymbol{R_{cd,ver}}$:

$$R_{cd,ver} = \frac{Ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2.\pi.\lambda_{ver}.L} \approx 2{,}31 \times 10^{-3} \ °C/W$$

- Résistance thermique de conduction de la couche de calcaire $\boldsymbol{R_{cd,cal}}$:

$$R_{cd,cal} = \frac{r_{cd,cal}}{S'_2} \approx \frac{r_{cd,cal}}{S_2} = \frac{r_{cd,cal}}{\pi.D_2.L} \approx 2{,}27 \times 10^{-4} \ °C/W$$

- Résistance thermique de convection du côté de la solution d'aniline $\boldsymbol{R_{CV,1}}$:

$$R_{CV,1} = \frac{1}{h_1.S_1} = \frac{1}{h_1.\pi.D_1.L} \approx 7{,}58 \times 10^{-4} \ °C/W$$

- Résistance thermique de convection du côté de l'eau $\boldsymbol{R_{CV,2}}$:

$$R_{CV,2} = \frac{1}{h_2.S'_2} \approx \frac{1}{h_2.S_2} = \frac{1}{h_2.\pi.D_2.L} \approx 7{,}47 \times 10^{-5} \ °C/W$$

4. Puissance thermique $\boldsymbol{\Phi}$ transférée de l'eau à la solution d'aniline.
Circuit thermique :

Φ $R_{CV,2}$ $R_{cd,cal}$ $R_{cd,ver}$ $R_{CV,1}$
T_C T_{p2} T_{p1} T_F

D'après le circuit, on a:

$$\Phi = \frac{T_C - T_F}{R_{CV,2} + R_{cd,cal} + R_{cd,ver} + R_{CV,1}} \approx 18385 \ W$$

<u>Exercice III.12</u>: (Extrait du contrôle de génie des procédés, 2012/2013)

<u>Les parties A et B sont indépendantes</u>

A. En sortant d'un four, un long barreau cylindrique de fer, de diamètre $D_e = 4\ cm$ ayant une température uniforme égale à $T_S = 160°C$, est placé perpendiculairement à un écoulement d'air à la vitesse $V_\infty = 6\ m/s$ et à la température $T_\infty = 20°C$.

1. Calculer le coefficient de transfert de chaleur par convection h entre le barreau et l'air.

2. En déduire la puissance thermique échangée, par unité de longueur du barreau, entre l'air et le barreau.

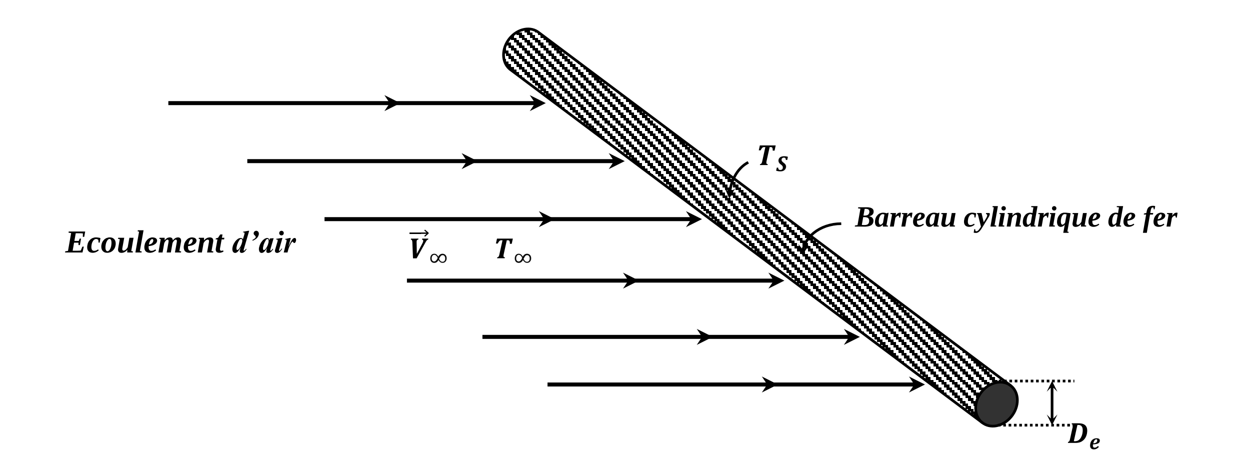
Fluide	$T_m = \frac{T_\infty + T_s}{2}$	ρ *(Kg/m³)*	C_p *(J/Kg.°C)*	λ *(W/m.°C)*	μ *(Kg/m.s)*
Air	*90°C*	*0,96*	*1009*	*0,03*	$0,0214\times10^{-3}$

- Pour calculer le nombre de ***Nusselt Nu***, on utilisera la corrélation de ***Hilpert***, valable pour ***un gaz***:

$$Nu = A.Re^m$$

Les valeurs de A et m sont données dans le tableau suivant:

Re	A	m
1-4	***0,891***	***0,330***
4-40	***0,821***	***0,385***
40-4000	***0,615***	***0,466***
4000-40000	***0,174***	***0,618***
40000-400000	***0,024***	***0,805***



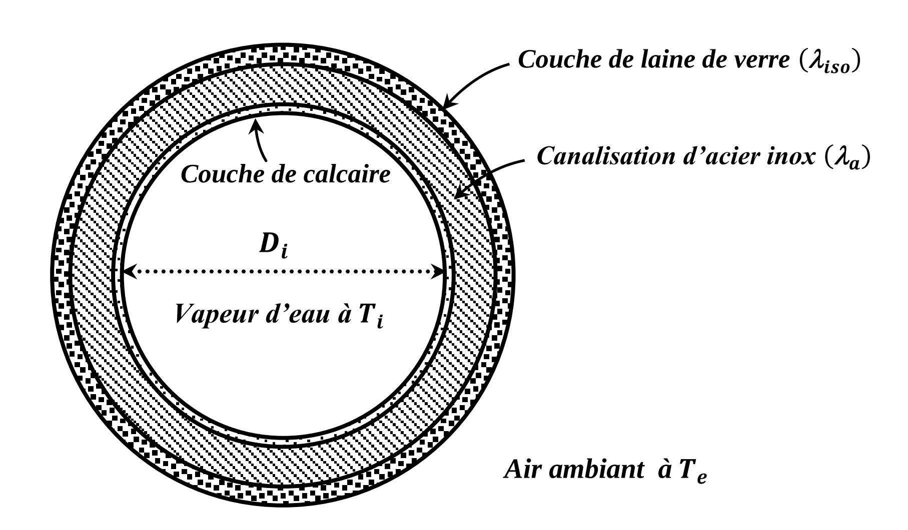
B. De la vapeur d'eau à la température $T_i = 204°C$ s'écoule, à la vitesse $V_i = 10\ m/s$, à l'intérieur d'une canalisation cylindrique en acier inox ($\lambda_a = 16\ W/m.°C$) de diamètre intérieur $D_i = 10\ cm$, d'épaisseur $e = 1\ cm$ et de longueur $L = 10\ m$. Cette canalisation est revêtue d'une couche isolante de laine de verre ($\lambda_{iso} = 0,046\ \ W/m.°C$ et $e_i = 0,5\ cm$), sa paroi interne (S_i) est recouverte d'une couche de calcaire de très faible épaisseur et de résistance thermique $r_{cd,cal} = 4\times10^{-4}\ m^2.°C/W$. La canalisation est placée dans l'air ambiant à $T_e = 20°C$ où le coefficient d'échange thermique par convection est égal à $h_e = 16\ W/m^2.°C$.

1. Calculer le coefficient de transfert de chaleur par convection h_i entre la vapeur d'eau et la paroi interne de la canalisation.

2. Calculer les résistances thermiques de conduction et de convection. Tracer le circuit thermique.

3. Calculer les pertes thermiques à travers la paroi de la canalisation isolée et les températures T_{pi} et T_{pe} sur les surfaces interne et externe de celle-ci.

Fluide	$T_m = \frac{T_i + T_{pi}}{2}$	$\rho(Kg/m^3)$	$c_p(J/Kg.°C)$	$\lambda\,(W/m.°C)$	$\mu(Kg/m.s)$
Vapeur d'eau		*0,461*	*1933*	*0,035*	$0,0168\times10^{-3}$



- Pour calculer le nombre de ***Nusselt***, ***Nu***, dans le cas des écoulements turbulents ***(Re>3000)*** à l'intérieur des conduites très longues ($\frac{L}{D_h} > 60$), on utilisera la corrélation de ***Dittus-Boelter***, valable pour ***0,7<Pr<120*** et $Re \geq 10^4$:

$$Nu = 0,023 \times Re^{0,8} \times Pr^n$$

avec:

- $n=0,3$ si $T_P < T_{fm}$ (refroidissement du fluide)
- $n=0,4$ si $T_P > T_{fm}$ (échauffement du fluide)

(T_P température de la paroi de la canalisation, T_{fm} température moyenne du fluide).

Solution:

A. Refroidissement d'un barreau cylindrique

1. Coefficient de transfert de chaleur par convection h entre le barreau et l'air :

a) Nombres de ***Prandtl***, ***Pr***, et de ***Reynolds***, ***Re*** :

On a:

$$\begin{cases} Pr = \frac{\mu.c_p}{\lambda} \approx 0,72 \\ Re = \frac{\rho.V_\infty.D_e}{\mu} = \approx 10766 \end{cases}$$

b) Nombre de ***Nusselt*** Nu et coefficient d'échange h:

Nu se calcule à l'aide de la corrélation de ***Hilpert*** :

$$Nu = A \times Re^m$$

$$Re \approx 1,08 \times 10^4 \in [4000; 40000] \Rightarrow \begin{cases} A = 0,174 \\ m = 0,618 \end{cases}$$

A.N. : $Nu \approx 54$

On en déduit le coefficient d'échange convectif $\boldsymbol{h}$:

$$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{Nu.\lambda}}{\boldsymbol{D_e}}$$

$$\textit{A.N.:} \quad \boldsymbol{h \approx 40,5\ W/m^2.°C}$$

2. Puissance thermique échangée, par unité de longueur du barreau, entre l'air et le barreau :

$$\boldsymbol{\Phi = h \times S \times (T_s - T_\infty) \quad \Rightarrow \quad \Phi' = h \times \pi \times D_e \times (T_s - T_\infty) \approx 712,5\ W/m}$$

B. Vapeur d'eau s'écoulant dans une canalisation cylindrique isolée :

1. Coefficient de transfert de chaleur par convection $\boldsymbol{h_i}$ entre la vapeur d'eau et la paroi interne de la canalisation

a) Nombres de ***Prandtl***, $\boldsymbol{Pr}$, et de ***Reynolds***, $\boldsymbol{Re}$:

On a:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Pr = \dfrac{\mu.c_p}{\lambda} \approx 0,93} \\ \boldsymbol{Re = \dfrac{\rho.V_i.D_h}{\mu} = \dfrac{\rho.V_i.D_i}{\mu} \approx 27440} \end{cases}$$

$\boldsymbol{Re} > 3000$, le régime d'écoulement est donc ***turbulent***.

b) Nombre de ***Nusselt*** $\boldsymbol{Nu}$ et coefficient d'échange $\boldsymbol{h_i}$:

$\frac{L}{D_h} = \frac{L}{D_1} \approx \boldsymbol{100} > 60$, $\boldsymbol{0,7} < (\boldsymbol{Pr \approx 0,93}) < 120$ et $(\boldsymbol{Re \approx 2,74 \times 10^4}) \geq \boldsymbol{10^4}$, on utilisera donc la corrélation de ***Dittus-Boelter***:

$$\boldsymbol{Nu = 0,023 \times Re^{0,8} \times Pr^{0,3}}$$

$$\textit{A.N. :} \quad \boldsymbol{Nu \approx 80}$$

On en déduit le coefficient d'échange convectif $\boldsymbol{h_i}$:

$$\boldsymbol{h_i = \frac{Nu.\lambda}{D_i} \approx 28\ W/m^2.°C}$$

2. Résistances thermiques et circuit thermique:

- Résistance thermique de conduction de la canalisation en acier $\boldsymbol{R_{cd,a}}$:

$$\boldsymbol{R_{cd,a} = \frac{Ln\left(1 + 2.\dfrac{e}{D_i}\right)}{2.\pi.\lambda_a.L} \approx 1,81 \times 10^{-4}\ °C/W}$$

- Résistance thermique de conduction de la couche isolante $\boldsymbol{R_{cd,iso}}$:

$$\boldsymbol{R_{cd,a} = \frac{Ln\left(1 + 2.\dfrac{e_i}{D_e}\right)}{2.\pi.\lambda_{iso}.L} \approx 27,694 \times 10^{-3}\ °C/W}$$

- Résistance thermique de conduction de la couche de calcaire $\boldsymbol{R_{cd,cal}}$:

$$\boldsymbol{R_{cd,cal} = \frac{r_{cd,cal}}{S'_i} \approx \frac{r_{cd,cal}}{S_i} = \frac{r_{cd,cal}}{\pi.D_i.L} \approx 1,27 \times 10^{-4}\ °C/W}$$

- Résistance thermique de convection du côté de la vapeur $\boldsymbol{R_{cv,i}}$:

$$\boldsymbol{R_{cv,i} = \frac{1}{h_i.S_i} = \frac{1}{h_i.\pi.D_i.L} \approx 11,368 \times 10^{-3}\ °C/W}$$

- Résistance thermique de convection du côté de l'air ambiant $\boldsymbol{R_{cv,e}}$:

$$R_{cv,e} = \frac{1}{h_e.S_e} = \frac{1}{h_e.\pi(D_e + 2.e_i).L} \approx 15,3 \times 10^{-3} \ °C/W$$

- Circuit thermique :

T_i —Φ→ $R_{cv,i}$ → T_{pi} → $R_{cd,cal}$ → $R_{cd,a}$ → $R_{cd,iso}$ → T_{pe} → $R_{cv,e}$ → T_a

3. Pertes thermiques à travers la paroi de la canalisation isolée et les températures T_{pi} et T_{pe} sur les surfaces interne et externe de celle-ci.

a) Pertes thermiques à travers la paroi de la canalisation isolée

D'après le circuit, on a :

$$\Phi = \frac{T_i - T_e}{R_{cv,i} + R_{cd,cal} + R_{cd,a} + R_{cd,iso} + R_{cv,e}} \approx 3365,4\ W$$

b) Températures T_{pi} et T_{pe} sur les surfaces interne et externe de la canalisation :

D'après le circuit, on a :

$$\begin{cases} T_{pi} = T_i - \Phi \times R_{cv,i} \approx 165,7°C \\ T_{pe} = T_e + \Phi \times R_{cv,e} \approx 71,5°C \end{cases}$$
